

9 | Compléments sur les réels

Cahier de calcul : $\emptyset$.

Banque CCINP : $\emptyset$.

Majorants, plus grand élément, borne supérieure

— **Exercice 1** ●○○○ — Montrer que toute suite décroissante d'entiers naturels est *stationnaire*, i.e. constante à partir d'un certain rang.

— **Exercice 2** ●●○○ — ☑ Déterminer, si elles existent, les bornes supérieures et inférieures des parties de $\mathbb{R}$ suivantes.

1. $] -5, 2]$. 2. $\mathbb{R}_+^*$. 3. $] -7, -3] \cup]6, 7]$. 4. $\{3 + 4n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

5. $\left\{ \frac{1}{3n} - \frac{2}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$. 6. $\{(1 + (-1)^n)e^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. 7. $\left\{ \sin\left(\frac{2k\pi}{7}\right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

— **Exercice 3** ●●○○ — ☑ Soit A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$, et a un réel positif. On considère les ensembles

$$-A = \{-x \mid x \in A\}, \quad aA = \{ax \mid x \in A\} \quad \text{et} \quad A + B = \{x + y \mid (x, y) \in A \times B\}.$$

- Montrer que ces ensembles sont bornés.
- Calculer leur borne inférieure et leur borne supérieure en fonction de a et des bornes inférieure et supérieure de A et B .

— **Exercice 4** ●○○○ — Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall a \in A, \quad \forall b \in B, \quad a \leq b.$$

Montrer que A est majorée, B est minorée et $\sup A \leq \inf B$.

— **Exercice 5** ●○○○ — Soit I un intervalle non vide et $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions majorées. Comparer $\sup_I f + \sup_I g$ et $\sup_I (f + g)$.

— **Exercice 6** ●○○○ — ☑ Montrer que la fonction f définie sur $]0, 1]$ par

$$f(x) = (1 - x) \sin \frac{\pi}{x}$$

est bornée. Atteint-elle ses bornes ?

— **Exercice 7** ●○○○ — ☑ Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction majorée. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on pose

$$f^*(y) = \sup_{x \leq y} f(x).$$

- Justifier que la fonction f^* est correctement définie.
- Illustrer la définition de f^* par des figures rapides à main levée sur différents exemples de fonctions f .
- Déterminer f^* lorsque f est croissante sur $\mathbb{R}$.
- Étudier la monotonie de f^* .

— **Exercice 8** ●●○○ — **Périodes d'une fonction périodique**

Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $\mathcal{T}$ l'ensemble des périodes de f . On pose $\alpha = \inf(\mathcal{T} \cap \mathbb{R}_+^*)$. Montrer que si $\alpha > 0$, alors $\alpha \in \mathcal{T}$.

— **Exercice 9** ●●○○ — **Un théorème de point fixe** Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction croissante. On veut montrer que f possède un point fixe.

- On pose $T = \{x \in [0, 1] \mid f(x) \leq x\}$.
 - Montrer que T possède une borne inférieure t .
 - Montrer que $f(t)$ minore T .
 - Montrer que $f[T] \subset T$.
 - En déduire que $f(t) = t$.
- Ce résultat subsiste-t-il pour une fonction croissante de $[0, 1[$ dans lui-même ?

— **Exercice 10** ●●○○ — ? **Distance à une partie**

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, justifier l'existence de $\inf\{|x - a| \mid a \in A\}$, appelé la *distance de x à A* et noté $d(x, A)$.
- Calculer $d(x, A)$, pour tout $x \in A$.
- Montrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|d(x, A) - d(y, A)| \leq |x - y|$.
- On pose $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1[$. Déterminer $d(x, A)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, et tracer le graphe de la fonction $x \mapsto d(x, A)$.

— Exercice 11 ●●○○ — Longueur d'un intervalle

Pour toute partie A de $\mathbb{R}$ non vide et bornée, on pose $\ell(A) = \sup\{|x - y| \mid (x, y) \in A^2\}$.

- Justifier que $\ell(A)$ est correctement défini.
- Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$, montrer que

$$\ell([a, b]) = \ell([a, b[) = \ell(]a, b]) = \ell(]a, b[) = b - a.$$

Approximations des réels

— Exercice 12 ●○○○ — Soit $\varepsilon > 0$ et $A > 0$.

Déterminer un rang, *i.e.* un entier, à partir duquel

- $\frac{n}{n^2 + 1} < \varepsilon$.
- $\sqrt{n^2 - n} > A$.
- $3^n - 2^n > A$.
- $\frac{2^n}{n} > A$.

— Exercice 13 ●●○○ — ? ✓

- Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
 - Montrer que $[x] + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = [2x]$.
 - En déduire la valeur de $S_n = \sum_{k=0}^n \left\lfloor \frac{x + 2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor$.
 - En déduire que $S_n = [x]$ à partir d'un certain rang N , lorsque $x \geq 0$.
- (●●●) Montrer plus généralement que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = [nx].$$

— Exercice 14 ●●○○ — ✓

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer en fonction de $[x]$, en distinguant des cas, les quantités
 - $[2x]$.
 - $[-x]$.
 - $\left\lfloor x + \frac{1}{4} \right\rfloor$.
- Montrer que, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$,
 - $[2x] = [x] + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$.
 - $\left\lfloor \frac{[kx]}{k} \right\rfloor = [x]$.
 - $[x] + [2x] + [3x] \leq [6x]$.
- Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
 - $[2x] = [5 - x]$.
 - $[3x] - 2 = [x]^2$.
 - $[3x] = 2 - [x]$.
 - $[2x] = [x]^2$.

— Exercice 15 ●●○○ — ? Putnam 1948 — Montrer l'assertion

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor.$$

— Exercice 16 ●●○○ — ? ✓

Existe-t-il un entier n tel que $30^{4^{1777}}$ et 2^n aient le même nombre de chiffres ?

— Exercice 17 ●●○○ —

Montrer que $\left\{ \frac{p}{2^n} \mid p \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N} \right\}$ est une partie dense de $\mathbb{R}$.

— Exercice 18 ●●○○ — Soit A une partie de $\mathbb{R}$ vérifiant

$$(i) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists a, b \in A, \quad a < x < b \quad (ii) \quad \forall a, b \in A, \quad \frac{a+b}{2} \in A.$$

Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$.

— Exercice 19 ●●●● — Énumération des rationnels via une suite de Stern

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \frac{1}{1 + 2[x] - x}$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ passe par chaque rationnel positif une et une seule fois.

— Exercice 20 ●●●● — Caractérisation des rationnels

Montrer qu'un réel x est un rationnel si et seulement si son développement décimal propre est périodique à partir d'un certain rang.

Indication : si les entiers n et 10 sont premiers entre eux, on pourra admettre qu'il existe un entier naturel non nul r tel que $10^r \equiv 1 [n]$.

Indications

Exercice 10. 3. On pourra partir de « $\forall a \in A, \quad d(x, A) \leq |x - a|$ » et penser à l'inégalité triangulaire.

Exercice 13. 2. On pourra distinguer les cas $x - [x] \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$, pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Exercice 15. Commencer par établir $\lfloor \sqrt{4n+1} \rfloor \leq \lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor \leq \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor$ et conclure en examinant les classes de congruence des carrés modulo 4.

Exercice 16. Que peut-on conjecturer en observant le nombre de chiffres des premières puissances de 2 ?

Élément de réponses

Exercice 2. 1. $\inf = -5$ et $\sup = \max = 2$. **2.** $\inf = 0$. **3.** $\inf = -7$ et $\sup = \max = 7$.

4. $\inf = \min = 3$. **5.** $\inf = \min = -\frac{5}{3}$ et $\sup = \max = \frac{1}{72}$. **6.** $\inf = \min = 0$.

7. $\inf = \min = \sin \frac{10\pi}{7}$ et $\sup = \max = \sin \frac{4\pi}{7}$.

Exercice 3. 2. $\inf(-A) = -\sup A$ et $\sup(A) = -\inf(A)$

$\inf(aA) = a \inf A$ et $\sup(aA) = a \sup(A)$

$\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$ et $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Exercice 5. $\sup_I (f+g) \leq \sup_I f + \sup_I g$.

Exercice 6. On a sur $]0, 1]$, $|f| < 1$, $\sup f = 1$ et $\inf f = -1$, et f n'atteint pas ses bornes.

Exercice 7. 3. $f^* = f$. **4.** f^* est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13. 1.b $[x] - \lfloor \frac{x}{2^{n+1}} \rfloor$.

Exercice 14. 1.a. $[2x] = \begin{cases} 2[x] & \text{si } x - [x] < \frac{1}{2}, \\ 2[x] + 1 & \text{si } x - [x] \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$

1.b. $[-x] = \begin{cases} -[x] & \text{si } x \in \mathbb{Z}, \\ -[x] - 1 & \text{sinon.} \end{cases}$ **1.c.** $[x + \frac{1}{4}] = \begin{cases} [x] & \text{si } x - [x] < \frac{3}{4}, \\ [x] + 1 & \text{si } x - [x] \geq \frac{3}{4}. \end{cases}$

2.a. Distinguer les cas $x - [x] \in [0, \frac{1}{2}[$ et $x - [x] \in [\frac{1}{2}, 1[$.

2.c. Distinguer les cas $x - [x] \in [\frac{p}{k}, \frac{p+1}{k}[$, pour $p \in \llbracket 0, 5 \rrbracket$.

3.a. $[\frac{3}{2}, 2[$. **3.b.** $[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}[\cup [2, \frac{7}{3}[\cup [\frac{11}{3}, 4[$. **3.c.** $[\frac{2}{3}, 1[$. **3.d.** $[0, \frac{1}{2}[\cup [2, \frac{5}{2}[$.

Exercice 16. Oui.