9 | Compléments sur les réels

Cahier de calcul : $\varnothing$. **Banque CCINP :** $\varnothing$.

Majorants, plus grand élément, borne supérieure

Exercice 1 ●○○○ Montrer que toute suite décroissante d'entiers naturels est *stationnaire*, *i.e.* constante à partir d'un certain rang.

Exercice 2 ●●○○ Déterminer, si elles existent, les bornes supérieures et inférieures des parties de $\mathbb{R}$ suivantes :

1. $]-5\,,2]$. **2.** $\mathbb{R}_+^*$. **3.** $]-7\,,-3] \cup]6\,,7]$. **4.** $\{3+4n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

5. $\left\{\dfrac{1}{3n} - \dfrac{2}{n^2} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^*\right\}$. **6.** $\{(1+(-1)^n)\,\mathrm{e}^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. **7.** $\left\{\sin\left(\dfrac{2k\pi}{7}\right) \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exercice 3 ●●○○ Soit A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$, et a un réel positif. On considère les ensembles

$$-A = \{-x \mid x \in A\}, \quad aA = \{ax \mid x \in A\} \quad \text{et} \quad A+B = \{x+y \mid (x,y) \in A \times B\}.$$

1. Montrer que ces ensembles sont bornés.
2. Calculer leur borne inférieure et leur borne supérieure en fonction de a et des bornes inférieure et supérieure de A et B.

Exercice 4 ●○○○ Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall a \in A, \quad \forall b \in B, \quad a \leqslant b.$$

Montrer que A est majorée, B est minorée et $\sup A \leqslant \inf B$.

Exercice 5 ●○○○ Soit I un intervalle non vide et $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions majorées. Comparer $\sup\limits_I f + \sup\limits_I g$ et $\sup\limits_I (f+g)$.

Exercice 6 ●○○○ Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction majorée. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on pose

$$f^\star(y) = \sup_{x \leqslant y} f(x).$$

1. Justifier que la fonction $f^\star$ est correctement définie.
2. Illustrer la définition de $f^\star$ par des figures rapides à main levée sur différents exemples de fonctions f.
3. Déterminer $f^\star$ lorsque f est croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Étudier la monotonie de $f^\star$.

Exercice 7 ●●○○ **Périodes d'une fonction périodique**
Soit $f \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$ et $\mathcal{T}$ l'ensemble des périodes de f. On pose $\alpha = \inf\big(\mathcal{T} \cap \mathbb{R}_+^*\big)$. Montrer que si $\alpha > 0$, alors $\alpha \in \mathcal{T}$.

Exercice 8 ●●○○ **Un théorème de point fixe** Soit $f : [0\,,1] \longrightarrow [0\,,1]$ une fonction croissante. On veut montrer que f possède un point fixe.

1. On pose $T = \{x \in [0\,,1] \mid f(x) \leqslant x\}$.
   - **a.** Montrer que T possède une borne inférieure t.
   - **b.** Montrer que $f(t)$ minore T.
   - **c.** Montrer que $f(T) \subset T$.
   - **d.** En déduire que $f(t) = t$.
2. Ce résultat subsiste-t-il pour une fonction croissante de $[0\,,1[$ dans lui-même ?

Exercice 9 ●●●○ **Distance à une partie**
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, justifier l'existence de $\inf\{|x-a| \mid a \in A\}$, appelé la *distance de x à A* et noté $d(x, A)$.
2. Calculer $d(x, A)$, pour tout $x \in A$.
3. Montrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\quad |d(x,A) - d(y,A)| \leqslant |x-y|$.
4. On pose $A = \mathbb{Q} \cap [0\,,1[$. Déterminer $d(x, A)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, et tracer le graphe de la fonction $x \longmapsto d(x, A)$.

Exercice 10 ●●○○ **Longueur d'un intervalle**
Pour toute partie A de $\mathbb{R}$ non vide et bornée, on pose $\ell(A) = \sup\big\{|x-y| \;\big|\; (x,y) \in A^2\big\}$.

1. Justifier que $\ell(A)$ est correctement défini.
2. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$, montrer que

$$\ell([a\,,b]) = \ell([a\,,b[) = \ell(]a\,,b]) = \ell(]a\,,b[) = b - a.$$

Approximations des réels

Exercice 11 ●○○○ Soit $\varepsilon > 0$ et $A > 0$. Déterminer un rang, *i.e.* un entier, à partir duquel

1. $\dfrac{n}{n^2+1} < \varepsilon$. **2.** $\sqrt{n^2-n} > A$. **3.** $3^n - 2^n > A$. **4.** $\dfrac{2^n}{n} > A$.

Exercice 12 ●●○○

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer que $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \dfrac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$.

b. En déduire la valeur de $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \dfrac{x+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor$.

c. En déduire que $S_n = \lfloor x \rfloor$ à partir d'un certain rang N, lorsque $x \geqslant 0$.

2. (●●●) Montrer plus généralement que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor.$$

Exercice 13 ●●○○

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer en fonction de $\lfloor x \rfloor$, en distinguant des cas, les quantités :

a. $\lfloor 2x \rfloor$. **b.** $\lfloor -x \rfloor$. **c.** $\left\lfloor x + \dfrac{1}{4} \right\rfloor$.

2. Montrer que, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$,

a. $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \dfrac{1}{2} \right\rfloor$. **b.** $\left\lfloor \dfrac{\lfloor kx \rfloor}{k} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$. **c.** $\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor \leqslant \lfloor 6x \rfloor$.

3. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

a. $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor 5 - x \rfloor$. **b.** $\lfloor 3x \rfloor - 2 = \lfloor x \rfloor^2$. **c.** $\lfloor 3x \rfloor = 2 - \lfloor x \rfloor$. **d.** $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor^2$.

Exercice 14 ●●●● Énumération des rationnels via une suite de Stern

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{1}{1 + 2\lfloor x \rfloor - x}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ passe par chaque rationnel positif une et une seule fois.

Exercice 15 ●●○○

Montrer que $\left\{ \dfrac{p}{2^n} \;\middle|\; p \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N} \right\}$ est une partie dense de $\mathbb{R}$.

Exercice 16 ●●○○ Soit A une partie de $\mathbb{R}$ vérifiant

(i) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists a, b \in A, \quad a < x < b$ **(ii)** $\forall a, b \in A, \quad \dfrac{a+b}{2} \in A$.

Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 17 ●●●○ Caractérisation des rationnels

Montrer qu'un réel x est un rationnel si et seulement si son développement décimal propre est périodique à partir d'un certain rang.

Indications

Exercice 9. **3.** On pourra partir de « $\forall a \in A, \quad d(x, A) \leqslant |x - a|$ ».

Exercice 12. **2.** On pourra distinguer les cas $x - \lfloor x \rfloor \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Élément de réponses

Exercice 2. **1.** $\inf = -5$ et $\sup = \max = 2$. **2.** $\inf = 0$. **3.** $\inf = -7$ et $\sup = \max = 7$.
4. $\inf = \min = -\dfrac{5}{3}$ et $\sup = \max = \dfrac{1}{72}$. **5.** $\inf = \min = 0$.
7. $\inf = \min = \sin \dfrac{10\pi}{7}$ et $\sup = \max = \sin \dfrac{4\pi}{7}$.

Exercice 3. **2.** $\inf(-A) = -\sup A$ et $\sup(A) = -\inf(A)$
$\inf(aA) = a \inf A$ et $\sup(aA) = a \sup(A)$
$\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$ et $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Exercice 5. $\sup\limits_I (f+g) \leqslant \sup\limits_I f + \sup\limits_I g$.

Exercice 6. **3.** $f^\star = f$. **4.** $f^\star$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12. **1.b** $\lfloor x \rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2^{n+1}} \right\rfloor$.

Exercice 13. **1.a.** $\lfloor 2x \rfloor = \begin{cases} 2\lfloor x \rfloor & \text{si } x - \lfloor x \rfloor < \frac{1}{2}, \\ 2\lfloor x \rfloor + 1 & \text{si } x - \lfloor x \rfloor \geqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$

1.b. $\lfloor -x \rfloor = \begin{cases} -\lfloor x \rfloor & \text{si } x \in \mathbb{Z}, \\ -\lfloor x \rfloor - 1 & \text{sinon.} \end{cases}$ **1.c.** $\lfloor x + \frac{1}{4} \rfloor = \begin{cases} \lfloor x \rfloor & \text{si } x - \lfloor x \rfloor < \frac{3}{4}, \\ \lfloor x \rfloor + 1 & \text{si } x - \lfloor x \rfloor \geqslant \frac{3}{4}. \end{cases}$

2.a. Distinguer les cas $x - \lfloor x \rfloor \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$ et $x - \lfloor x \rfloor \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$.

2.c. Distinguer les cas $x - \lfloor x \rfloor \in \left[\frac{p}{k}, \frac{p+1}{k}\right[$, pour $p \in [\![0, 5]\!]$.

3.a. $\left[\frac{3}{2}, 2\right[$. **3.b.** $\left[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right[\cup \left[2, \frac{7}{3}\right[\cup \left[\frac{11}{3}, 4\right[$. **3.c.** $\left[\frac{2}{3}, 1\right[$. **3.d.** $\left[0, \frac{1}{2}\right[\cup \left[2, \frac{5}{2}\right[$.