

Équations différentielles linéaires

Cahier de calcul : fiche 20.

Banque CCINP : exercices 4 et 19.

Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Exercice 1 ●●○○ — ☒

Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes.

- $x \ln(x)y' - y = 2x^2 \ln^2 x$ sur $]0, 1[$.
- $xy' - y = x$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $y(1) = 1$.
- $\sqrt{1-x^2}y' - y = 1$ sur $] -1, 1[$.
- $y' + x^2y + x^2 = 0$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0) = 0$.
- $y' + y \operatorname{th} x = \operatorname{th} x$ sur $\mathbb{R}$.
- $(x-1)y' + y = x$ sur $]1, +\infty[$ avec $y(2) = 2$.
- $3xy' - 4y = x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $xy' - 2y = x^3 \sin x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- (●●●) $y' = |y|$ sur $\mathbb{R}$.
- $y' - y \tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$ sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ avec $y(0) = 1$.

Exercice 2 ●●○○ — ☒

Déterminer toutes les fonctions $y \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour lesquelles

- $4y' + y = \cos x$ et $y(0) = 0$.
- $y' - 3y = e^{3x} + e^x \sin x$.
- $y' + 3y = e^{-3x} + 6$.
- $y' - y = \cos x + e^x \sin(2x)$ et $y(0) = 0$.
- $y' + 4y = 2 + e^{-4x} + \sin x$.

Exercice 3 ●●○○ — ☒

Résoudre l'équation $y' + y = |x|$ d'inconnue $y \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 4 ●○○○ — ☒ Banque d'exercices CCINP 2026 (42)

On considère les deux équations différentielles suivantes

$$(H) : 2xy' - 3y = 0 \quad \text{et} \quad (E) : 2xy' - 3y = \sqrt{x}.$$

- Résoudre (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
- Résoudre (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
- L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0, +\infty[$?

Exercice 5 ●●○○ — ☒ Recollement de solutions

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

- $xy' + y = \operatorname{Arctan} x$.
- $\sin(x)y' - \cos(x)y = 0$.

Exercice 6 ●○○○ — ☐ ☒ Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Exercice 7 ●●○○ — ☐ ☒ Caractérisation de la fonction $t \mapsto e^{\alpha t}$

- Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que la fonction $t \mapsto e^{\alpha t}$ est la seule fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ solution de $\begin{cases} y' = \alpha y \\ y(0) = 1. \end{cases}$
- Déterminer les fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ vérifiant l'équation fonctionnelle

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, \quad f(s+t) = f(s)f(t).$$

Exercice 8 ●●○○ — ☐ ☒ Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x).$$

Exercice 9 ●●○○ — ☐ ☒ Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $f(0) \neq 0$ et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x)f'(y) + f(y)f'(x).$$

Exercice 10 ●○○○ — ☒ Donner une équation différentielle dont les solutions sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{C+x}{1+x^2}$, où $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 11 ●●○○ — ☒ Soit l'équation différentielle $y' = a(x)y + b(x)$, avec $a, b \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que les tangentes au point d'abscisse x_0 aux courbes intégrales sont ou bien parallèles, ou bien toutes concourantes.

Exercice 12 ●●○○ — ☒ Résoudre l'équation, d'inconnue $y \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,

$$y' + y = \int_0^1 y(u) du.$$

— **Exercice 13** ●●○○ — Déterminer les fonctions f et g continues sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x f(t) dt = e^x + g(x) \quad \text{et} \quad \int_0^x g(t) dt = e^x + f(x).$$

— **Exercice 14** ●●○○ — Soit $a, b \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ périodiques de période 1. À quelle(s) condition(s) l'équation différentielle $y' = a(x)y + b(x)$ admet-elle des solutions 1-périodiques ? Le cas échéant, les déterminer.

— **Exercice 15** ●●○○ — **Équations de Bernoulli**

Une *équation de Bernoulli* est une équation différentielle de la forme

$$(\mathcal{B}_\lambda) : \quad y' = a(x)y + b(x)y^\alpha,$$

où a et b sont deux fonctions continues sur un intervalle I à valeurs réelles et α un réel distinct de 0 et 1. Notons que, pour α quelconque, il est nécessaire que y soit à valeurs strictement positives.

1. Pour quelle valeur du réel β le changement de fonction inconnue $y = z^\beta$ permet-il de se ramener à une équation linéaire ?
2. *Application.*
 - a. Résoudre $x^2 y' + y + y^2 = 0$ avec $y(1) = 1$.
 - b. Résoudre $xy' - y + 3x^2 y^2 = 0$.

— **Exercice 16** ●●○○ — **Équations de Riccati**

Une *équation de Riccati* est une équation différentielle de la forme

$$(\mathcal{R}) : \quad y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x),$$

où a, b et c sont des fonctions continues sur un intervalle I à valeurs réelles.

1.
 - a. Montrer que si y_0 est une solution particulière de $(\mathcal{R})$, le changement d'inconnue $z = y - y_0$ aboutit à une équation de Bernoulli avec $\alpha = 2$.
 - b. Quel changement de fonction inconnue peut-on finalement effectuer pour se ramener à une équation linéaire d'ordre 1 ?
2. *Application.* Résoudre

$$(\mathcal{R}) : \quad (1 + x^3)y' = y^2 + x^2 y + 2x.$$

Indication : on pourra chercher une solution particulière sous forme polynomiale.

Équations différentielles linéaires d'ordre 2

— **Exercice 17** ●●○○ — Déterminer les fonctions $y \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour lesquelles

1. $y'' + y' - 2y = 10 \sin x$, $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.
2. $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x} + 4$ et $y(0) = y'(0) = 1$.
3. $y'' + y' = \operatorname{sh} x$.
4. $y'' - y = e^x \cos(2x)$.
5. $y'' - 3y' + 2y = e^{-x} \sin x$.
6. $y'' + 3y' + 2y = \operatorname{ch} x$.
7. $y'' + 2y' + y = \operatorname{sh} x$.
8. $y'' + 4y = \sin(2x)$.
9. $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos(2x)$.

— **Exercice 18** ●○○○ —

1. Déterminer l'unique solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy

$$y'' + y = 3x^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

2.
 - a. Montrer que l'équation $2y'' - 3y' + y = x e^x$ possède une solution de la forme $x \mapsto (ax^2 + bx)e^x$ avec a et b dans $\mathbb{R}$.
 - b. En déduire toutes les solutions réelles sur $\mathbb{R}$ de l'équation

$$2y'' - 3y' + y = x e^x.$$

— **Exercice 19** ●●○○ — **Banque d'exercices CCINP 2026 (31)**

1. Déterminer une primitive de $x \mapsto \cos^4 x$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + y = \cos^3 x$, ~~en utilisant la méthode de variation des constantes (programme de seconde année).~~

— **Exercice 20** ●●○○ — **Existence d'une solution particulière pour une EDL2**

Soit $a, b \in \mathbb{K}$, I un intervalle et $c \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. On considère l'équation

$$(E) : \quad y'' + ay' + by = c(x)$$

et r une racine de son polynôme caractéristique.

1. Soit f une fonction deux fois dérivable sur I et la fonction z définie sur I par $x \mapsto e^{-rx} f(x)$. Montrer que f est solution de l'équation (E) si, et seulement si, la fonction z' est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
2. En déduire que l'équation (E) admet des solutions.

— **Exercice 21** ●●○○ — ☒ **Solutions bornées** Déterminer tous les couples de réels (a, b) tels que toute solution de $y'' + ay' + by = 0$ soit bornée.

— **Exercice 22** ●●○○ — ☐ ☒ **Mines-Ponts PSI 2026**

Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\forall f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \quad (f^{(n)} + f \text{ bornée} \implies f \text{ bornée}).$$

— **Exercice 23** ●●○○ — ☒ **Système différentiel**

Résoudre les systèmes différentiels suivants, d'inconnues $(y, z) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$.

$$1. \begin{cases} y' - y = z \\ z' + z = 3y \end{cases} \quad 2. \begin{cases} y' + 2y = z \\ z' + z = 6y \end{cases}$$

— **Exercice 24** ●●○○ — ☒ **Changement de variables**

1. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle

$$x^2 y'' + 3xy' + y = (x+1)^2$$

en posant $x = e^t$. Cela revient à poser $z(t) = y(e^t)$ et à résoudre une nouvelle équation différentielle d'inconnue z (ici un changement de variable est un changement de fonction).

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(1+x^2)^2 y'' + 2x(1+x^2)y' + 4y = 0$$

en posant $x = \tan t$.

3. Résoudre sur $] -1, 1[$ l'équation différentielle

$$(1-x^2)y'' - xy' + y = 0$$

en posant $x = \sin t$.

4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(1+x^2)y'' + xy' - \alpha^2 y = 0$$

en posant $x = \operatorname{sh} t$.

Indication : on pourra établir que $\operatorname{sh}^{-1} : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ pour conclure.

— **Exercice 25** ●●○○ — ☒ **Équations d'Euler** Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $c \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et

$$(\mathcal{E}) : x^2 y'' + axy' + by = c(x).$$

1. Montrer que la résolution de $(\mathcal{E})$ sur $]0, +\infty[$ (resp. sur $] -\infty, 0[$) équivaut à la résolution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants via le changement de variable $x = e^t$ (resp. $x = -e^t$).
2. Application. Résoudre $x^2 y'' - 5xy' + 9y = x + 1$ sur $\mathbb{R}$.

— **Exercice 26** ●●○○ — ☐ ☒ Résoudre l'équation $y'' + |y| = 1$ avec $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$

— **Exercice 27** ●●○○ — ☐ ☒ Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2f(-x) + x.$$

— **Exercice 28** ●●○○ — ☒ On considère l'équation d'inconnue $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$

$$(\mathcal{E}) : \quad \forall x > 0, \quad f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right).$$

1. Montrer que toute solution de $(\mathcal{E})$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et solution d'une équation différentielle du second ordre à préciser.
2. Résoudre l'équation trouvée à la question précédente grâce au changement de variable $x = e^t$.
3. Montrer que les solutions de $(\mathcal{E})$ sont exactement les fonctions

$$x \mapsto \lambda \sqrt{x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x + \frac{\pi}{3}\right), \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

— **Exercice 29** ●●○○ — ☒ On considère l'équation d'inconnue $f \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$(\mathcal{E}) : \quad f f'' - f'^2 = 1.$$

1. Soit f une solution de $(\mathcal{E})$.
 - a. Montrer que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
 - b. Montrer que $\frac{f''}{f}$ est constante sur $\mathbb{R}$.
 - c. Exprimer la valeur de cette constante en fonction de $f(0)$ et $f'(0)$.
2. Montrer qu'il existe une et une seule solution f de $(\mathcal{E})$ pour laquelle $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.
3. Soit f une solution de $(\mathcal{E})$ et $(a, b, \lambda) \in \mathbb{R}^3$ avec $a \neq 0$.
À quelle condition sur λ la fonction $x \mapsto \lambda f(ax + b)$ est-elle solution de $(\mathcal{E})$?
4. En déduire toutes les solutions de $(\mathcal{E})$.

Indications

Exercices 6, 7, 9, 12, 13. Procéder par analyse-synthèse.

Exercice 8. Procéder par analyse-synthèse ou se ramener à l'exercice 6.

Exercice 9. On pourra considérer le taux d'accroissement $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Exercice 14. Écrire la solution générale y à l'aide d'une intégrale et expliciter $y(x+1)-y(x)$.

Exercice 16. 2. $x \mapsto x^2$ est une solution particulière.

Exercice 22. Commencer par traiter les cas $n = 1$ et $n = 2$, puis essayer de généraliser.

Exercice 26. Commencer par résoudre les équations linéaires $y'' + y = 1$ et $y'' - y = 1$ sur $\mathbb{R}$. Puis procéder par analyse-synthèse. On notera que la condition initiale impose le signe d'une solution y au voisinage à gauche et à droite de 0.

Exercice 27. Procéder par analyse-synthèse et se ramener à une équation différentielle d'ordre 2 lors de l'analyse.

Éléments de réponses

Exercice 1. λ désigne un réel quelconque.

1. $x \mapsto (x^2 + \lambda) \ln x$. 2. $x \mapsto x \ln x + x$. 3. $x \mapsto -1 + \lambda e^{\text{Arcsin}(x)}$.

4. $x \mapsto -1 + \exp(-x^3/3)$. 5. $x \mapsto 1 + \frac{\lambda}{\text{ch}(x)}$. 6. $x \mapsto \frac{x^2}{2(x-1)}$.

7. $x \mapsto \lambda x^{4/3} - x$. 8. $x \mapsto (\lambda - \cos x)x^2$.

9. $x \mapsto \lambda e^x$ avec $\lambda \geq 0$ ou $x \mapsto \lambda e^{-x}$ avec $\lambda \leq 0$. 10. $x \mapsto \frac{x+1}{\cos x}$.

Exercice 2. λ désigne un réel quelconque.

1. $x \mapsto \frac{1}{17}(4 \sin x - \cos x + e^{x/4})$. 2. $-\frac{1}{5}(\cos x + 2 \sin x)e^x + (\lambda + x)e^{3x}$.

3. $2 + (x + \lambda)e^{-3x}$. 4. $x \mapsto -\frac{1}{2}\cos(2x)e^x - \frac{1}{2}\cos x + e^x + \frac{1}{2}\sin(x)$.

5. $x \mapsto (\lambda + x)e^{-4x} - \frac{1}{17}\cos x + \frac{4}{17}\sin x + \frac{1}{2}$.

Exercice 3. $x \mapsto (\lambda_0(x) + \lambda)e^{-x}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\lambda_0 : x \mapsto \begin{cases} (1-x)e^x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ (x-1)e^x + 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

Exercice 4. 1. $x \mapsto \lambda x^{3/2}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. 2. $x \mapsto \lambda x^{3/2} - \frac{\sqrt{x}}{2}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. 3. Non.

Exercice 5. 1. Les solutions sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ sont les $x \mapsto \text{Arctan}(x) - \frac{\ln(1+x^2)}{2x} + \frac{\lambda}{x}$.

L'unique solution sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \begin{cases} \text{Arctan}(x) - \frac{\ln(1+x^2)}{2x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

2. Les solutions sur les intervalles $I_k =]k\pi, (k+1)\pi[$ sont les $\lambda \sin|_{I_k}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les $\lambda \sin$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 6. $x \mapsto ax$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 7. 2. La fonction nulle et les fonctions $t \mapsto e^{\alpha t}$, avec $\alpha \in \mathbb{K}$.

Exercice 8. $x \mapsto cx e^x$, $c \in \mathbb{R}$.

Exercice 9. $x \mapsto \lambda e^{x/(2\lambda)}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 10. $y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{1}{1+x^2}$.

Exercice 11. Si $a(x_0) = 0$, les tangentes sont parallèles, sinon elles concourent au point $\left(x_0 - \frac{1}{a(x_0)}, -\frac{b(x_0)}{a(x_0)}\right)$.

Exercice 12. Les solutions sont les fonctions constantes.

Exercice 13. L'unique solution est donnée par $f = g : x \mapsto -(x+1)e^x$.

Exercice 14. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = \left(\lambda + \int_0^x b(t)e^{-A(t)}dt\right)e^{A(x)}$, avec A une primitive de a sur $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons $\alpha = \int_0^1 a(t)dt$ et $\beta = \int_0^1 b(t)e^{-A(t)}dt$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x+1) = y(x) + (\lambda(e^\alpha - 1) + \beta e^\alpha)e^{A(x)}$$

et

- si $\alpha \neq 0$, l'équation admet une unique solution 1-périodique, obtenue pour $\lambda = \frac{\beta e^\alpha}{1-e^\alpha}$;
- si $\alpha = 0$ et $\beta = 0$, toute solution est 1-périodique ;
- si $\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$, aucune solution n'est 1-périodique.

Exercice 15. 1. $\beta = (1-\alpha)^{-1}$.

Exercice 16. 1.a $z = y - y_0$ mène à l'équation de Bernoulli $z' = (2a(x)y_0(x) + b(x))z + a(x)z^2$.

1.b L'exercice 15 suggère le changement de fonction $y = y_0 + 1/u$ pour se ramener à

$$u' + (2a(x)y_0(x) + b(x))u + a(x) = 0.$$

2. Le changement de fonction $y = x^2 + 1/u$ ramène à l'équation linéaire d'ordre 1

$$(1+x^3)u' + 3x^2u + 1 = 0$$

qui admet $x \mapsto \frac{\lambda-x}{1+x^3}$ pour solutions, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, sur $J \in \{]-\infty, -1[,]1, +\infty[\}$.

Finalement les solutions maximales de $(\mathcal{R})$ sont les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x-1$ sur $\mathbb{R}$ et les fonctions $x \mapsto \frac{1+\lambda x^2}{\lambda-x}$ sur $] -\infty, \lambda[$ ou $] \lambda, +\infty[$, avec $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Exercice 17. 1. $x \mapsto 2e^x - e^{-2x} - 3 \sin x - \cos x$. 2. $x \mapsto 1 + (x^2 + x)e^{2x}$.

3. $x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu + \frac{1}{2}x e^{-x} + \text{ch } x - \frac{1}{4}e^x$.

4. $x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^x - \frac{1}{8}\cos(2x)e^x + \frac{1}{8}e^x \sin(2x)$.

5. $x \mapsto \lambda e^{2x} + \mu e^x + \frac{1}{10}(\cos x + \sin x)e^{-x}$. 6. $x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{-2x} + \frac{x}{2}e^{-x} + \frac{1}{12}e^x$.

7. $x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{-x} - \frac{1}{4}x^2 e^{-x} + \frac{1}{8}e^x$. 8. $\lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x) - \frac{1}{4}x \cos(2x)$.

9. $(\lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x))e^x + \frac{1}{4}x e^x \sin(2x)$.

Exercice 18. 1. $x \mapsto 7 \cos x + 2 \sin x + 3x^2 - 6$. 2. $x \mapsto \lambda e^{x/2} + \frac{1}{2}(x^2 - 4x + \mu)e^x$.

Exercice 19. 1. $x \mapsto \frac{1}{32} \sin(4x) + \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{3}{8}x$. 2. $\cos^3 x = \frac{1}{4} \cos(3x) + \frac{3}{4} \cos(x)$, ce qui mène aux solutions $x \mapsto \lambda \cos x + (\mu + \frac{3}{8}x) \sin x - \frac{1}{32} \cos(3x)$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Exercice 20. 1. f est solution de (E) si et seulement si z' est solution de l'équation différentielle $y' + (2r+a)y = e^{-rx}c(x)$.

Exercice 22. La seule solution est $n = 1$.

Exercice 23. 1. $(x \mapsto \lambda e^{2x} + \mu e^{-2x}, x \mapsto \lambda e^{2x} - 3\mu e^{-2x})$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

2. $(x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-4x}, x \mapsto 3\lambda e^x - 2\mu e^{-4x})$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Exercice 21. $a = 0$ et $b > 0$.

Exercice 24. 1. $x \mapsto \lambda \frac{\ln x}{x} + \frac{\mu}{x} + \frac{x^2}{9} + \frac{x}{2} + 1$. 2. $x \mapsto \lambda \cos(2 \operatorname{Arctan} x) + \mu \sin(2 \operatorname{Arctan} x)$.

3. $x \mapsto -\lambda x + \mu \sqrt{1-x^2}$. 4. $x \mapsto \lambda(x + \sqrt{1+x^2})^\alpha + \mu(x + \sqrt{1+x^2})^{-\alpha}$.

Exercice 25. 1. $(\mathcal{E})$ équivaut sur $]0, +\infty[$ à $z'' + (a-1)z' + bz = c(e^t)$, où $z(t) = y(e^x)$.

2. Les solutions sont les fonctions $x \mapsto \begin{cases} (\lambda \ln(x) + \mu)x^3 + \frac{x}{4} + \frac{1}{9} & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{9} & \text{si } x = 0 \\ (\lambda' \ln(-x) + \mu')x^3 + \frac{x}{4} + \frac{1}{9} & \text{si } x < 0, \end{cases}$ avec

$\lambda, \lambda', \mu, \mu' \in \mathbb{R}$.

Exercice 26. L'unique solution est donnée par $x \mapsto \begin{cases} e^x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ \sin x - \cos x + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 3\pi/2 \\ e^{-x+3\pi/2} - 1 & \text{si } x \geq 3\pi/2. \end{cases}$

Exercice 27. $x \mapsto a \cos(2x) + a \sin(2x) + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$, $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 28. 1. $(\mathcal{E}') : x^2 f'' + f = 0$. 2. $(\mathcal{E}')$ équivaut à $(\mathcal{E}'') : z'' - z' + z = 0$, via $z(t) = y(e^x)$.

Exercice 29. 1. c $\frac{1+f'(0)^2}{f(0)^2}$. 2. $f = \operatorname{ch}$ 3. $\lambda = \pm \frac{1}{a}$. 4. $x \mapsto \frac{1}{\alpha} \operatorname{ch}(\alpha x + \beta)$, avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$.