

# Équations différentielles linéaires

Cahier de calcul : fiche 20.

Banque CCINP : exercices 4 et 18.

## Équations différentielles linéaires d'ordre 1

### Exercice 1 ●●○ — ✓

Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes.

- $xy' \ln x - y = 2x^2 \ln^2 x$  sur  $]0, 1[$ .
- $xy' - y = x$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  avec  $y(1) = 1$ .
- $\sqrt{1 - x^2}y' - y = 1$  sur  $] -1, 1[$ .
- $y' + x^2y + x^2 = 0$  sur  $\mathbb{R}$  avec  $y(0) = 0$ .
- $y' + y \operatorname{th} x = \operatorname{th} x$  sur  $\mathbb{R}$ .
- $(x - 1)y' + y = x$  sur  $]1, +\infty[$  avec  $y(2) = 2$ .
- $3xy' - 4y = x$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- $xy' - 2y = x^3 \sin x$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- (●●●)  $y' = |y|$  sur  $\mathbb{R}$ .
- $y' - y \tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$  sur  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  avec  $y(0) = 1$ .

### Exercice 2 ●●○ — ✓

Déterminer toutes les fonctions  $y \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  pour lesquelles

- $4y' + y = \cos x$  et  $y(0) = 0$ .
- $y' - 3y = e^{3x} + e^x \sin x$ .
- $y' + 3y = e^{-3x} + 6$ .
- $y' - y = \cos x + e^x \sin(2x)$  et  $y(0) = 0$ .
- $y' + 4y = 2 + e^{-4x} + \sin x$ .

### Exercice 3 ●●○ — ✓

Résoudre l'équation  $y' + y = |x|$  d'inconnue  $y \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

### Exercice 4 ●○○ — ✓ Banque d'exercices CCINP 2025 (42)

On considère les deux équations différentielles suivantes

$$(H) : 2xy' - 3y = 0 \quad \text{et} \quad (E) : 2xy' - 3y = \sqrt{x}.$$

- Résoudre  $(H)$  sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .
- Résoudre  $(E)$  sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .
- L'équation  $(E)$  admet-elle des solutions sur l'intervalle  $[0, +\infty[$  ?

### Exercice 5 ●●○ — ✓ Recollement de solutions

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  les équations différentielles suivantes.

- $xy' + y = \operatorname{Arctan} x$ .
- $\sin(x)y' - \cos(x)y = 0$ .

### Exercice 6 ●○○ — ✓ Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

### Exercice 7 ●●○ — ✓ Caractérisation de la fonction $t \mapsto e^{\alpha t}$

- Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Montrer que la fonction  $t \mapsto e^{\alpha t}$  est la seule fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  solution de  $\begin{cases} y' = \alpha y \\ y(0) = 1. \end{cases}$
- Déterminer les fonctions dérivables de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{K}$  vérifiant l'équation fonctionnelle

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, \quad f(s + t) = f(s)f(t).$$

### Exercice 8 ●●○ — ✓ Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = e^x f(y) + e^y f(x).$$

### Exercice 9 ●●○ — ✓ Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $f(0) \neq 0$ et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x)f'(y) + f(y)f'(x).$$

### Exercice 10 ●○○ — ✓ Donner une équation différentielle dont les solutions sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{C + x}{1 + x^2}$ , où $C \in \mathbb{R}$ .

### Exercice 11 ●●○ — ✓ Soit l'équation différentielle $y' = a(x)y + b(x)$ , avec $a, b \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , et $x_0 \in \mathbb{R}$ . Montrer que les tangentes au point d'abscisse $x_0$ aux courbes intégrales sont ou bien parallèles, ou bien toutes concourantes.

### Exercice 12 ●●○ — ✓ Résoudre l'équation, d'inconnue $y \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,

$$y' + y = \int_0^1 y(u) du.$$

— **Exercice 13** ●●● —   Soit  $a, b \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  périodiques de période 1. À quelle(s) condition(s) l'équation différentielle  $y' = a(x)y + b(x)$  admet-elle des solutions 1-périodiques ? Le cas échéant, les déterminer.

— **Exercice 14** ●●● —  **Équations de Bernoulli**

Une *équation de Bernoulli* est une équation différentielle de la forme

$$(\mathcal{B}_\lambda) : y' = a(x)y + b(x)y^\alpha,$$

où  $a$  et  $b$  sont deux fonctions continues sur un intervalle  $I$  à valeurs réelles et  $\alpha$  un réel distinct de 0 et 1. Notons que, pour  $\alpha$  quelconque, il est nécessaire que  $y$  soit à valeurs strictement positives.

1. Pour quelle valeur du réel  $\beta$  le changement de fonction inconnue  $y = z^\beta$  permet-il de se ramener à une équation linéaire.
2. *Application.*
  - a. Résoudre  $x^2y' + y + y^2 = 0$  avec  $y(1) = 1$ .
  - b. Résoudre  $xy' - y + 3x^2y^2 = 0$ .

— **Exercice 15** ●●● —   **Équations de Riccati**

Une *équation de Riccati* est une équation différentielle de la forme

$$(\mathcal{R}) : y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x),$$

où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des fonctions continues sur un intervalle  $I$  à valeurs réelles.

1.
  - a. Montrer que si  $y_0$  est une solution particulière de  $(\mathcal{R})$ , le changement d'inconnue  $z = y - y_0$  aboutit à une équation de Bernoulli avec  $\alpha = 2$ .
  - b. Quel changement de fonction inconnue peut-on finalement effectuer pour se ramener à une équation linéaire d'ordre 1 ?
2. *Application.* Résoudre

$$(\mathcal{R}) : (1 + x^3)y' = y^2 + x^2y + 2x.$$

*Indication : on pourra chercher une solution particulière sous forme polynomiale.*

## Équations différentielles linéaires d'ordre 2

— **Exercice 16** ●●● —  Déterminer les fonctions  $y \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  pour lesquelles

1.  $y'' + y' - 2y = 10 \sin x$ ,  $y(0) = 0$  et  $y'(0) = 1$ .
2.  $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x} + 4$  et  $y(0) = y'(0) = 1$ .
3.  $y'' + y' = \operatorname{sh} x$ .
4.  $y'' - y = e^x \cos(2x)$ .
5.  $y'' - 3y' + 2y = e^{-x} \sin x$ .
6.  $y'' + 3y' + 2y = \operatorname{ch} x$ .
7.  $y'' + 2y' + y = \operatorname{sh} x$ .
8.  $y'' + 4y = \sin(2x)$ .
9.  $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos(2x)$ .

— **Exercice 17** ●●● — 

1. Déterminer l'unique solution sur  $\mathbb{R}$  du problème de Cauchy

$$y'' + y = 3x^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

2.
  - a. Montrer que l'équation  $2y'' - 3y' + y = x e^x$  possède une solution de la forme  $x \mapsto (ax^2 + bx)e^x$  avec  $a$  et  $b$  dans  $\mathbb{R}$ .
  - b. En déduire toutes les solutions réelles sur  $\mathbb{R}$  de l'équation

$$2y'' - 3y' + y = x e^x.$$

— **Exercice 18** ●●● —  **Banque d'exercices CCINP 2025 (31)**

1. Déterminer une primitive de  $x \mapsto \cos^4 x$ .
2. Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle  $y'' + y = \cos^3 x$ , ~~en utilisant la méthode de variation des constantes (programme de seconde année).~~

— **Exercice 19** ●●● —  **Système différentiel**

Résoudre les systèmes différentiels suivants, d'inconnues  $(y, z) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$ .

1.  $\begin{cases} y' - y = z \\ z' + z = 3y \end{cases}$
2.  $\begin{cases} y' + 2y = z \\ z' + z = 6y \end{cases}$

— **Exercice 20** ●●● —  **Solutions bornées** Déterminer tous les couples de réels  $(a, b)$  tels que toute solution de  $y'' + ay' + by = 0$  soit bornée.

— Exercice 21 ●●● —  Changement de variables

1. Résoudre sur  $\mathbb{R}_+^*$  l'équation différentielle

$$x^2 y'' + 3xy' + y = (x+1)^2$$

en posant  $x = e^t$ . Cela revient à poser  $z(t) = y(e^t)$  et à résoudre une nouvelle équation différentielle d'inconnue  $z$  (ici un changement de variable est un changement de fonction).

2. Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle

$$(1+x^2)^2 y'' + 2x(1+x^2)y' + 4y = 0$$

en posant  $x = \tan t$ .

3. Résoudre sur  $] -1, 1[$  l'équation différentielle

$$(1-x^2)y'' - xy' + y = 0$$

en posant  $x = \sin t$ .

4. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ . Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle

$$(1+x^2)y'' + xy' - \alpha^2 y = 0$$

en posant  $x = \operatorname{sh} t$ .

Indication : on pourra établir que  $\operatorname{sh}^{-1} : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$  pour conclure.

— Exercice 22 ●●● —  Équations d'Euler Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $c \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et

$$(\mathcal{E}) : x^2 y'' + axy' + by = c(x).$$

- Montrer que la résolution de  $(\mathcal{E})$  sur  $]0, +\infty[$  (resp. sur  $]-\infty, 0[$ ) équivaut à la résolution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants via le changement de variable  $x = e^t$  (resp.  $x = -e^t$ ).
- Application. Résoudre  $x^2 y'' - 5xy' + 9y = x + 1$  sur  $\mathbb{R}$ .

— Exercice 23 ●●● —   Résoudre l'équation  $y'' + |y| = 1$  avec  $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$

— Exercice 24 ●●● —   Déterminer les fonctions  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2f(-x) + x.$$

— Exercice 25 ●●● —  On considère l'équation d'inconnue  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$

$$(\mathcal{E}) : \quad \forall x > 0, \quad f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right).$$

- Montrer que toute solution de  $(\mathcal{E})$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et solution d'une équation différentielle du second ordre à préciser.
- Résoudre l'équation trouvée à la question précédente grâce au changement de variable  $x = e^t$ .
- Montrer que les solutions de  $(\mathcal{E})$  sont exactement les fonctions

$$x \mapsto \lambda \sqrt{x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x + \frac{\pi}{3}\right), \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

— Exercice 26 ●●● —  On considère l'équation d'inconnue  $f \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$(\mathcal{E}) : \quad f f'' - f'^2 = 1.$$

- Soit  $f$  une solution de  $(\mathcal{E})$ .
  - Montrer que  $f$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ .
  - Montrer que  $\frac{f''}{f}$  est constante sur  $\mathbb{R}$ .
  - Exprimer la valeur de cette constante en fonction de  $f(0)$  et  $f'(0)$ .
- Montrer qu'il existe une et une seule solution  $f$  de  $(\mathcal{E})$  pour laquelle  $f(0) = 1$  et  $f'(0) = 0$ .
- Soit  $f$  une solution de  $(\mathcal{E})$  et  $(a, b, \lambda) \in \mathbb{R}^3$  avec  $a \neq 0$ .  
À quelle condition sur  $\lambda$  la fonction  $x \mapsto \lambda f(ax + b)$  est-elle solution de  $(\mathcal{E})$  ?
- En déduire toutes les solutions de  $(\mathcal{E})$ .

d'ordre 2 lors de l'analyse.

Exercice 24. Procéder par analyse synthétique et se ramener à une équation différentielle

signe d'une solution  $y$  au voisinage à gauche et à droite de 0.

Exercice 23. Commencer par résoudre les équations linéaires  $y'' + y = 1$  et  $y'' - y = 1$  sur  $\mathbb{R}$ . Puis procéder par analyse synthétique. On notera que la condition initiale impose le

Exercice 15. 2.  $x \mapsto x^2$  est une solution particulière.

Exercice 13. Écrire la solution générale  $y$  à l'aide d'une intégrale et expliciter  $y(x+1) - y(x)$ .

Exercice 9. On pourra considérer le taux d'accroissement  $\frac{y}{f(x) - f(x)}$ .

Exercice 8. Procéder par analyse synthétique ou se ramener à l'exercice 6.

Exercice 6, 7, 9, 12. Procéder par analyse synthétique.

Indications

## Éléments de réponses

**Exercice 1.**  $\lambda$  désigne un réel quelconque.

1.  $x \mapsto x^2 \ln x + \lambda \ln x$ . 2.  $x \mapsto x \ln x + x$ . 3.  $x \mapsto -1 + \lambda e^{\operatorname{Arctan}(x)}$ .
4.  $x \mapsto -1 + \exp\left(-\frac{x^3}{3}\right)$ . 5.  $x \mapsto 1 + \frac{\lambda}{\operatorname{ch}(x)}$ . 6.  $x \mapsto \frac{x^2}{2(x-1)}$ .
7.  $x \mapsto \lambda x^{4/3} - x$ . 8.  $x \mapsto (\lambda - \cos x)x^2$ .
9.  $x \mapsto \lambda e^x$  avec  $\lambda \geq 0$  ou  $x \mapsto \lambda e^{-x}$  avec  $\lambda \leq 0$ . 10.  $x \mapsto \frac{x+1}{\cos x}$ .

**Exercice 2.**  $\lambda$  désigne un réel quelconque.

1.  $x \mapsto \frac{1}{17}(4 \sin x - \cos x + e^{x/4})$ . 2.  $-\frac{1}{5}(\cos x + 2 \sin x)e^x + (\lambda + x)e^{3x}$ .
3.  $2 + (x + \lambda)e^{-3x}$ . 4.  $x \mapsto -\frac{1}{2}\cos(2x)e^x - \frac{1}{2}\cos x + e^x + \frac{1}{2}\sin(x)$ .
5.  $x \mapsto (\lambda + x)e^{-4x} - \frac{1}{17}\cos x + \frac{4}{17}\sin x + \frac{1}{2}$ .

**Exercice 3.**  $x \mapsto (\lambda_0(x) + \lambda)e^{-x}$ , où  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $\lambda_0 : x \mapsto \begin{cases} (1-x)e^x & \text{si } x \leq 0 \\ (x-1)e^x + 2 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

**Exercice 4.** 1.  $x \mapsto \lambda x^{3/2}$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ . 2.  $x \mapsto \lambda x^{3/2} - \frac{\sqrt{x}}{2}$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ . 3. Non.

**Exercice 5.** 1. Les solutions sur  $\mathbb{R}_-^*$  et  $\mathbb{R}_+^*$  sont les  $x \mapsto \operatorname{Arctan}(x) - \frac{\ln(1+x^2)}{2x} + \frac{\lambda}{x}$ .

L'unique solution sur  $\mathbb{R}$  est  $x \mapsto \begin{cases} \operatorname{Arctan}(x) - \frac{\ln(1+x^2)}{2x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

2. Les solutions sur les intervalles  $I_k = ]k\pi, (k+1)\pi[$  sont les  $\lambda \sin|_{I_k}$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ , pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ . Les solutions sur  $\mathbb{R}$  sont les  $\lambda \sin$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 6.**  $x \mapsto ax$  avec  $a \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 7.** 2. La fonction nulle et les fonctions  $t \mapsto e^{\alpha t}$ , avec  $\alpha \in \mathbb{K}$ .

**Exercice 8.**  $x \mapsto cx e^x$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 9.**  $x \mapsto \lambda e^{x/(2\lambda)}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ .

**Exercice 10.**  $y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{1}{1+x^2}$ .

**Exercice 11.** Si  $a(x_0) = 0$ , les tangentes sont parallèles, sinon elles concourent au point  $\left(x_0 - \frac{1}{a(x_0)}, -\frac{b(x_0)}{a(x_0)}\right)$ .

**Exercice 12.** Les solutions sont les fonctions constantes.

**Exercice 13.** Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y(x) = \left(\lambda + \int_0^x b(t)e^{-A(t)} dt\right)e^{A(x)}$ , avec  $A$  une primitive de

$a$  sur  $\mathbb{R}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Posons  $\alpha = \int_0^1 a(t) dt$  et  $\beta = \int_0^1 b(t)e^{-A(t)} dt$ , alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x+1) = y(x) + (\lambda(e^\alpha - 1) + \beta e^\alpha)e^{A(x)}$$

et

- si  $\alpha \neq 0$ , l'équation admet une unique solution 1-périodique, obtenue pour  $\lambda = \frac{\beta e^\alpha}{1-e^\alpha}$  ;
- si  $\alpha = 0$  et  $\beta = 0$ , toute solution est 1-périodique ;
- si  $\alpha = 0$  et  $\beta \neq 0$ , aucune solution n'est 1-périodique.

**Exercice 14.** 1.  $\beta = (1 - \alpha)^{-1}$ .

**Exercice 15.** 1.a  $z = y - y_0$  mène à l'équation de Bernoulli  $z' = (2a(x)y_0(x) + b(x))z + a(x)z^2$ .

1.b L'exercice 14 suggère le changement de fonction  $y = y_0 + 1/u$  pour se ramener à

$$u' + (2a(x)y_0(x) + b(x))u + a(x) = 0.$$

2. Le changement de fonction  $y = x^2 + 1/u$  ramène à l'équation linéaire d'ordre 1

$$(1+x^3)u' + 3x^2u + 1 = 0$$

qui admet  $x \mapsto \frac{\lambda-x}{1+x^3}$  pour solutions, avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ , sur  $J \in \{]-\infty, -1[, ]1, +\infty[ \}$ .

Finalement les solutions maximales de  $(\mathcal{R})$  sont les fonctions  $x \mapsto x^2$  et  $x \mapsto x-1$  sur

$\mathbb{R}$  et les fonctions  $x \mapsto \frac{1+\lambda x^2}{\lambda-x}$  sur  $] -\infty, \lambda[$  ou  $]\lambda, +\infty[$ , avec  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

**Exercice 16.** 1.  $x \mapsto 2e^x - e^{-2x} - 3 \sin x - \cos x$ . 2.  $x \mapsto 1 + (x^2 + x)e^{2x}$ .

3.  $x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu + \frac{1}{2}e^{-x} + \operatorname{ch} x - \frac{1}{4}e^x$ .

4.  $x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^x - \frac{1}{8}\cos(2x)e^x + \frac{1}{8}e^x \sin(2x)$ .

5.  $x \mapsto \lambda e^{2x} + \mu e^x + \frac{1}{10}(\cos x + \sin x)e^{-x}$ . 6.  $x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{-2x} + \frac{x}{2}e^{-x} + \frac{1}{12}e^x$ .

7.  $x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{-x} - \frac{1}{4}x^2 e^{-x} + \frac{1}{8}e^x$ . 8.  $\lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x) - \frac{1}{4}x \cos(2x)$ .

9.  $(\lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x))e^x + \frac{1}{4}x e^x \sin(2x)$ .

**Exercice 17.** 1.  $x \mapsto 7 \cos x + 2 \sin x + 3x^2 - 6$ . 2.  $x \mapsto \lambda e^{x/2} + \frac{1}{2}(x^2 - 4x + \mu)e^x$ .

**Exercice 18.** 1.  $x \mapsto \frac{1}{32} \sin(4x) + \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{3}{8}x$ . 2.  $\cos^3 x = \frac{1}{4} \cos(3x) + \frac{3}{4} \cos(x)$ , ce qui mène aux solutions  $x \mapsto \lambda \cos x + \mu \sin x - \frac{1}{32} \cos(3x) + \frac{3}{8}x \sin(x) + \frac{3}{8} \cos(x)$ , avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 19.** 1.  $(x \mapsto \lambda e^{2x} + \mu e^{-2x}, x \mapsto \lambda e^{2x} - 3\mu e^{-2x})$ , avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

2.  $(x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-4x}, x \mapsto 3\lambda e^x - 2\mu e^{-4x})$ , avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 20.**  $a = 0$  et  $b > 0$ .

**Exercice 21.** 1.  $x \mapsto \lambda \frac{\ln x}{x} + \frac{\mu}{x} + \frac{x^2}{9} + \frac{x}{2} + 1$ . 2.  $x \mapsto \lambda \cos(2 \operatorname{Arctan} x) + \mu \sin(2 \operatorname{Arctan} x)$ .

3.  $x \mapsto -\lambda x + \mu \sqrt{1-x^2}$ . 4.  $x \mapsto \lambda(x + \sqrt{1+x^2})^\alpha + \mu(x + \sqrt{1+x^2})^{-\alpha}$ .

**Exercice 22.** 1.  $(\mathcal{E})$  équivaut sur  $]0, +\infty[$  à  $z'' + (a-1)z' + bz = c(e^t)$ , où  $z(t) = y(e^t)$ .

2. Les solutions sont les fonctions  $x \mapsto \begin{cases} (\lambda \ln(x) + \mu)x^3 + \frac{x}{4} + \frac{1}{9} & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{9} & \text{si } x = 0 \\ (\lambda' \ln(-x) + \mu')x^3 + \frac{x}{4} + \frac{1}{9} & \text{si } x < 0, \end{cases}$  avec

$\lambda, \lambda', \mu, \mu' \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 23.** L'unique solution est donnée par  $x \mapsto \begin{cases} e^x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ \sin x - \cos x + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 3\pi/2 \\ e^{-x+3\pi/2} - 1 & \text{si } x \geq 3\pi/2. \end{cases}$

**Exercice 24.**  $x \mapsto a \cos(2x) + a \sin(2x) + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 25.** 1.  $(\mathcal{E}') : x^2 f'' + f = 0$ . 2.  $(\mathcal{E}')$  équivaut à  $(\mathcal{E}'') : z'' - z' + z = 0$ , via  $z(t) = y(e^x)$ .

**Exercice 26.** 1.c  $\frac{1+f'(0)^2}{f(0)^2}$ . 2.  $f = \operatorname{ch}$  3.  $\lambda = \pm \frac{1}{a}$ . 4.  $x \mapsto \frac{1}{a} \operatorname{ch}(\alpha x + \beta)$ , avec  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  et  $\beta \in \mathbb{R}$ .