8 Équations différentielles linéaires

Cahier de calcul : fiche 20. **Banque CCINP :** exercices 4 et 19.

Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Exercice 1 ●●○○ Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes.

1. $xy' \ln x - y = 2x^2 \ln^2 x$ sur $]0,1[$.
2. $xy' - y = x$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $y(1) = 1$.
3. $\sqrt{1-x^2}y' - y = 1$ sur $]-1,1[$.
4. $y' + x^2 y + x^2 = 0$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0) = 0$.
5. $y' + y \operatorname{th} x = \operatorname{th} x$ sur $\mathbb{R}$.
6. $(x-1)y' + y = x$ sur $]1,+\infty[$ avec $y(2) = 2$.
7. $3xy' - 4y = x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
8. $xy' - 2y = x^3 \sin x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
9. (●●●) $y' = |y|$ sur $\mathbb{R}$.
10. $y' - y \tan x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ avec $y(0) = 1$.

Exercice 2 ●●○○ Déterminer toutes les fonctions $y \in \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour lesquelles :

1. $4y' + y = \cos x$ et $y(0) = 0$.
2. $y' - 3y = \mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^x \sin x$.
3. $y' + 3y = \mathrm{e}^{-3x} + 6$.
4. $y' - y = \cos x + \mathrm{e}^x \sin(2x)$ et $y(0) = 0$.
5. $y' + 4y = 2 + \mathrm{e}^{-4x} + \sin x$.

Exercice 3 ●●○○ Résoudre l'équation $y' + y = |x|$ d'inconnue $y \in \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 4 ●○○○ **Banque d'exercices CCINP 2024 (42)**
On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$(H) : 2xy' - 3y = 0 \qquad \text{et} \qquad (E) : 2xy' - 3y = \sqrt{x}.$$

1. Résoudre (H) sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
2. Résoudre (E) sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
3. L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0,+\infty[$?

Exercice 5 ●●●○ **Recollement de solutions**
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

1. $xy' + y = \operatorname{Arctan} x$.
2. $\sin(x)y' - \cos(x)y = 0$.

Exercice 6 ●○○○ Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Exercice 7 ●●○○ **Caractérisation de la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha t}$**

1. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha t}$ est la seule fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ solution de $\begin{cases} y' = \alpha y \\ y(0) = 1. \end{cases}$
2. Déterminer les fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ vérifiant l'équation fonctionnelle
$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2, \quad f(s+t) = f(s)f(t).$$

Exercice 8 ●●○○ Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = \mathrm{e}^x f(y) + \mathrm{e}^y f(x).$$

Exercice 9 ●●○○ Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que $f(0) \neq 0$ et

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x)f'(y) + f(y)f'(x).$$

Exercice 10 ●○○○ Donner une équation différentielle dont les solutions sont les fonctions de la forme $x \longmapsto \dfrac{C+x}{1+x^2}$, où $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 11 ●●○○ Soit l'équation différentielle $y' = a(x)y + b(x)$, avec $a, b \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, et $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que les tangentes au point d'abscisse x_0 aux courbes intégrales sont ou bien parallèles, ou bien toutes concourantes.

Exercice 12 ●●○○ Résoudre l'équation, d'inconnue $y \in \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$,

$$y' + y = \int_0^1 y(u)\,\mathrm{d}u.$$

Exercice 13 ●●●○ Soit $a, b \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ périodiques de période 1.
À quelle(s) condition(s) l'équation différentielle $y' = a(x)y + b(x)$ admet-elle des solutions 1-périodiques ? Le cas échéant, les déterminer.

Exercice 14 ●●○○ Équations de Bernoulli

Une *équation de Bernoulli* est une équation différentielle de la forme $y' = a(t)y^\lambda + b(t)y$ où a et b sont deux fonctions continues sur un intervalle I et λ un réel distinct de 0 et 1. Notons que pour λ quelconque, il est nécessaire que y soit à valeurs strictement positives.

1. Soit $a, b \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$, $\lambda \notin \{0, 1\}$ et l'équation de Bernoulli
$$(\mathcal{E}_\lambda) : \quad y' = a(t)y^\lambda + b(t)y.$$
   a. Soit $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Effectuer le changement de variable $y = \varepsilon z^\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.
   b. Résoudre $(\mathcal{E}_\lambda)$ en prenant $\alpha = \dfrac{1}{1-\lambda}$.
2. *Application.* Résoudre $x^2y' + y + y^2 = 0$ avec $y(1) = 1$.
3. *Application.* Résoudre $xy' - y + 3x^2y^2 = 0$.

Exercice 15 ●●○○ Équations de Riccati Considérons l'équation différentielle
$$(\mathcal{E}) : \quad a(x)y' + b(x)y + c(x)y^2 + d(x) = 0.$$

1. Montrer que si y_0 est une solution particulière de $(\mathcal{E})$, le changement d'inconnue $z = y - y_0$ aboutit à une équation de Bernoulli avec $\alpha = 2$. Quel changement de variable faut-il effectuer pour obtenir une équation linéaire ?
2. Notons $y_0 : x \longmapsto \tan x$. Trouver une équation différentielle $(\mathcal{E})$ ne faisant pas intervenir la fonction tan dont y_0 est solution.
3. Résoudre $(\mathcal{E})$ en utilisant la première question.
4. Résoudre $(\mathcal{E})$ en posant $z = \operatorname{Arctan} y$ et comparer les deux résultats.

Exercice 16 ●●○○ À l'aide de l'exercice précédent, résoudre
$$(\mathcal{E}) : \quad x^3y' + y^2 + yx^2 + 2x^4 = 0.$$
On pourra chercher une solution paticulière sous la forme d'un polynôme.

Équations différentielles linéaires d'ordre 2

Exercice 17 ●●○○ Déterminer les fonctions $y \in \mathscr{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour lesquelles

1. $y'' + y' - 2y = 10\sin x$, $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.
2. $y'' - 4y' + 4y = 2\,\mathrm{e}^{2x} + 4$ et $y(0) = y'(0) = 1$.
3. $y'' + y' = \operatorname{sh} x$.
4. $y'' - y = \mathrm{e}^x \cos(2x)$.
5. $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{-x} \sin x$.
6. $y'' + 3y' + 2y = \operatorname{ch} x$.
7. $y'' + 2y' + y = \operatorname{sh} x$.
8. $y'' + 4y = \sin(2x)$.
9. $y'' - 2y' + 5y = \mathrm{e}^x \cos(2x)$.

Exercice 18 ●○○○

1. Déterminer l'unique solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy :
$$y'' + y = 3x^2,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$$
2. a. Montrer que l'équation $2y'' - 3y' + y = x\,\mathrm{e}^x$ possède une solution de la forme $x \longmapsto (ax^2 + bx)\,\mathrm{e}^x$ avec a et b dans $\mathbb{R}$.
   b. En déduire toutes les solutions réelles sur $\mathbb{R}$ de l'équation
$$2y'' - 3y' + y = x\,\mathrm{e}^x.$$

Exercice 19 ●●○○ Banque d'exercices CCINP 2024 (31)

1. Déterminer une primitive de $x \longmapsto \cos^4 x$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + y = \cos^3 x$, ~~en utilisant la méthode de variation des constantes~~ *(programme de seconde année)*.

Exercice 20 ●●○○ Système différentiel

Résoudre les systèmes différentiels suivants, d'inconnues $(y, z) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$.

1. $\begin{cases} y' - y = z \\ z' + z = 3y \end{cases}$
2. $\begin{cases} y' + 2y = z \\ z' + z = 6y \end{cases}$

Exercice 21 ●●○○ Solutions bornées Déterminer tous les couples de réels (a, b) tels que toute solution de $y'' + ay' + by = 0$ soit bornée.

Exercice 22 ●●●○ — Changement de variables

1. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle

$$x^2y'' + 3xy' + y = (x+1)^2$$

en posant $x = \mathrm{e}^t$. Cela revient à poser $z(t) = y(\mathrm{e}^t)$ et à résoudre une nouvelle équation différentielle d'inconnue z (ici un changement de variable est un changement de fonction).

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(1+x^2)^2y'' + 2x(1+x^2)y' + 4y = 0$$

en posant $x = \tan t$.

3. Résoudre sur $]-1,1[$ l'équation différentielle

$$(1-x^2)y'' - xy' + y = 0$$

en posant $x = \sin t$.

4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(1+x^2)y'' + xy' - \alpha^2 y = 0$$

en posant $x = \operatorname{sh} t$.

Exercice 23 ●●●○ — Équations d'Euler

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $c \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et

$$(\mathcal{E}) : \quad x^2y'' + axy' + by = c(x).$$

1. Montrer que la résolution de $(\mathcal{E})$ sur $]0\,,+\infty[$ (resp. sur $]-\infty\,,0[$) équivaut à la résolution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants via le changement de variable $x = \mathrm{e}^t$ (resp. $x = -\mathrm{e}^t$).

2. *Application.* Résoudre $x^2y'' - 5xy' + 9y = x+1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 24 ●●●●

Résoudre l'équation $y'' + |y| = 1$ avec $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$

Exercice 25 ●●○○

Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2f(-x) + x.$$

Exercice 26 ●●○○

On considère l'équation d'inconnue $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$

$$(\mathcal{E}) : \quad \forall x > 0, \quad f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right).$$

1. Montrer que toute solution de $(\mathcal{E})$ est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et solution d'une équation différentielle du second ordre à préciser.

2. Résoudre l'équation trouvée à la question précédente grâce au changement de variable $x = \mathrm{e}^t$.

3. Montrer que les solutions de $(\mathcal{E})$ sont exactement les fonctions

$$x \longmapsto \lambda\sqrt{x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x + \frac{\pi}{3}\right), \qquad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercice 27 ●●●○

On considère l'équation d'inconnue $f \in \mathscr{D}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$$(\mathcal{E}) : \quad ff'' - f'^2 = 1.$$

1. Soit f une solution de $(\mathcal{E})$.

- **a.** Montrer que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
- **b.** Montrer que $\dfrac{f''}{f}$ est constante sur $\mathbb{R}$.
- **c.** Exprimer la valeur de cette constante en fonction de $f(0)$ et $f'(0)$.

2. Montrer qu'il existe une et une seule solution f de $(\mathcal{E})$ pour laquelle $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

3. Soit f une solution de $(\mathcal{E})$ et $(a,b,\lambda) \in \mathbb{R}^3$ avec $a \neq 0$.
À quelle condition sur λ la fonction $x \longmapsto \lambda f(ax+b)$ est-elle solution de $(\mathcal{E})$?

4. En déduire toutes les solutions de $(\mathcal{E})$.

Indications

Exercice 6, 7, 9, 12. Procéder par analyse synthèse.

Exercice 8. Procéder par analyse synthèse ou se ramener à l'exercice 6.

Exercice 9. On pourra considérer le taux d'accroissement $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Exercice 13. Écrire la solution générale y à l'aide d'une intégrale et expliciter $y(x+1)-y(x)$.

Exercice 24. Commencer par résoudre les équations linéaires $y''+y=1$ et $y''-y=1$ sur $\mathbb{R}$. Puis procéder par analyse synthèse. On notera que la condition initiale impose le signe d'une solution y au voisinage à gauche et à droite de 0.

Exercice 25. Procéder par analyse synthèse et se ramener à une équation différentielle d'ordre 2 lors de l'analyse.

Éléments de réponses

Exercice 1. λ désigne un réel quelconque.

1. $x \longmapsto x^2\ln x+\lambda\ln x$. **2.** $x\longmapsto x\ln x+x$. **3.** $x\longmapsto -1+\lambda\,\mathrm{e}^{\operatorname{Arcsin}(x)}$.

4. $x\longmapsto -1+\exp\left(-\dfrac{x^3}{3}\right)$. **5.** $x\longmapsto 1+\dfrac{\lambda}{\operatorname{ch}(x)}$. **6.** $x\longmapsto \dfrac{x^2}{2(x-1)}$.

7. $x\longmapsto \lambda x^{4/3}-x$. **8.** $x\longmapsto(\lambda-\cos x)x^2$.

9. $x\longmapsto\lambda\,\mathrm{e}^{x}$ avec $\lambda\geqslant 0$ ou $x\longmapsto\lambda\,\mathrm{e}^{-x}$ avec $\lambda\leqslant 0$. **10.** $x\longmapsto\dfrac{x+1}{\cos x}$.

Exercice 2. λ désigne un réel quelconque.

1. $x\longmapsto\frac{1}{17}\left(4\sin x-\cos x+\mathrm{e}^{x/4}\right)$. **2.** $-\frac{1}{5}(\cos x+2\sin x)\,\mathrm{e}^{x}+(\lambda+x)\,\mathrm{e}^{3x}$.

3. $2+(x+\lambda)\,\mathrm{e}^{-3x}$. **4.** $x\longmapsto -\frac{1}{2}\cos(2x)\,\mathrm{e}^{x}-\frac{1}{2}\cos x+\mathrm{e}^{x}+\frac{1}{2}\sin(x)$.

5. $x\longmapsto(\lambda+x)\,\mathrm{e}^{-4x}-\frac{1}{17}\cos x+\frac{4}{17}\sin x+\frac{1}{2}$.

Exercice 3. $x\longmapsto(\lambda_0(x)+\lambda)\,\mathrm{e}^{-x}$, où $\lambda\in\mathbb{R}$ et $\lambda_0 : x\longmapsto\begin{cases}(1-x)\,\mathrm{e}^{x} & \text{si } x\leqslant 0\\ (x-1)\,\mathrm{e}^{x}+2 & \text{si } x\geqslant 0.\end{cases}$

Exercice 4. **1.** $x\longmapsto\lambda x^{3/2}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$. **2.** $x\longmapsto\lambda x^{3/2}-\dfrac{\sqrt{x}}{2}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$. **3.** Non.

Exercice 5. **1.** Les solutions sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ sont les $x\longmapsto\operatorname{Arctan}(x)-\dfrac{\ln(1+x^2)}{2x}+\dfrac{\lambda}{x}$.

L'unique solution sur $\mathbb{R}$ est $x\longmapsto\begin{cases}\operatorname{Arctan}(x)-\frac{\ln(1+x^2)}{2x} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$

2. Les solutions sur les intervalles $I_k=\left]k\pi\,,(k+1)\pi\right[$ sont les $\lambda\sin|_{I_k}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$, pour tout $k\in\mathbb{Z}$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les $\lambda\sin$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$.

Exercice 6. $x\longmapsto ax$ avec $a\in\mathbb{R}$.

Exercice 7. **2.** La fonction nulle et les fonctions $t\longmapsto\mathrm{e}^{\alpha t}$, avec $\alpha\in\mathbb{K}$.

Exercice 8. $x\longmapsto cx\,\mathrm{e}^{x}$, $c\in\mathbb{R}$.

Exercice 9. $x\longmapsto\lambda\,\mathrm{e}^{x/(2\lambda)}$, $\lambda\in\mathbb{R}^*$.

Exercice 10. $y'+\dfrac{2x}{1+x^2}y=\dfrac{1}{1+x^2}$.

Exercice 12. Les solutions sont les fonctions contantes.

Exercice 13. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $y(x)=\left(\lambda+\displaystyle\int_0^x b(t)\,\mathrm{e}^{-A(t)}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{A(x)}$, avec A une primitive de a sur $\mathbb{R}$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Posons $\alpha=\displaystyle\int_0^1 a(t)\,\mathrm{d}t$ et $\beta=\displaystyle\int_0^1 b(t)\,\mathrm{e}^{-A(t)}\,\mathrm{d}t$, alors

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad y(x+1)=y(x)+\left(\lambda(\mathrm{e}^{\alpha}-1)+\beta\,\mathrm{e}^{\alpha}\right)\mathrm{e}^{A(x)}$$

et

- si $\alpha\neq 0$, l'équation admet une unique solution 1-périodique, obtenue pour $\lambda=\frac{\beta\,\mathrm{e}^{\alpha}}{1-\mathrm{e}^{\alpha}}$;
- si $\alpha=0$ et $\beta=0$, toute solution est 1-périodique ;
- si $\alpha=0$ et $\beta\neq 0$, aucune solution n'est 1-périodique.

Exercice 17. **1.** $x\longmapsto 2\,\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-2x}-3\sin x-\cos x$. **2.** $x\longmapsto 1+(x^2+x)\,\mathrm{e}^{2x}$.

3. $x\longmapsto\lambda\,\mathrm{e}^{-x}+\mu+\frac{1}{2}x\,\mathrm{e}^{-x}+\operatorname{ch}x-\frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{x}$.

4. $x\longmapsto\lambda\,\mathrm{e}^{-x}+\mu\,\mathrm{e}^{x}-\frac{1}{8}\cos(2x)\,\mathrm{e}^{x}+\frac{1}{8}\,\mathrm{e}^{x}\sin(2x)$.

5. $x\longmapsto\lambda\,\mathrm{e}^{2x}+\mu\,\mathrm{e}^{x}+\frac{1}{10}(\cos x+\sin x)\,\mathrm{e}^{-x}$. **6.** $x\longmapsto\lambda\,\mathrm{e}^{-x}+\mu\,\mathrm{e}^{-2x}+\frac{x}{2}\,\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{12}\,\mathrm{e}^{x}$.

7. $x\longmapsto(\lambda x+\mu)\,\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{4}x^2\,\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{8}\,\mathrm{e}^{x}$. **8.** $\lambda\cos(2x)+\mu\sin(2x)-\frac{1}{4}x\cos(2x)$.

9. $(\lambda\cos(2x)+\mu\sin(2x))\,\mathrm{e}^{x}+\frac{1}{4}x\,\mathrm{e}^{x}\sin(2x)$.

Exercice 18. **1.** $x\longmapsto 7\cos x+2\sin x+3x^2-6$. **2.** $x\longmapsto\lambda\,\mathrm{e}^{x/2}+\frac{1}{2}(x^2-4x+\mu)\,\mathrm{e}^{x}$.

Exercice 19. **1.** $x\longmapsto\dfrac{1}{32}\sin(4x)+\dfrac{1}{4}\sin(2x)+\dfrac{3}{8}x$. **2.** $\cos^3 x=\dfrac{1}{4}\cos(3x)+\dfrac{3}{4}\cos(x)$, ce qui mène aux solutions $x\longmapsto\lambda\cos x+\mu\sin x-\dfrac{1}{32}\cos(3x)+\dfrac{3}{8}x\sin(x)+\dfrac{3}{8}\cos(x)$, avec $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

Exercice 20. **1.** $\left(x\longmapsto\lambda\,\mathrm{e}^{2x}+\mu\,\mathrm{e}^{-2x}, x\longmapsto\lambda\,\mathrm{e}^{2x}-3\mu\,\mathrm{e}^{-2x}\right)$.

2. $\left(x\longmapsto\lambda\,\mathrm{e}^{x}+\mu\,\mathrm{e}^{-4x}, x\longmapsto 3\lambda\,\mathrm{e}^{x}-2\mu\,\mathrm{e}^{-4x}\right)$.

Exercice 21. $a=0$ et $b>0$.

Exercice 22. **1.** $x\longmapsto\lambda\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{\mu}{x}+\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{x}{2}+1$. **2.** $x\longmapsto\lambda\cos(2\operatorname{Arctan}x)+\mu\sin(2\operatorname{Arctan}x)$.

3. $x\longmapsto-\lambda x+\mu\sqrt{1-x^2}$. **4.** $x\longmapsto\lambda\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{\alpha}+\mu\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{-\alpha}$.

Exercice 23. **1.** $(\mathcal{E})$ équivaut sur $]0\,,+\infty[$ à $z''+(a-1)z'+bz=c(\mathrm{e}^{t})$, où $z(t)=y(\mathrm{e}^{t})$.

2. Les solutions sont les fonctions $x\longmapsto\begin{cases}(\lambda\ln(x)+\mu)x^3+\frac{x}{4}+\frac{1}{9} & \text{si } x>0\\ \frac{1}{9} & \text{si } x=0\\ (\lambda'\ln(-x)+\mu')x^3+\frac{x}{4}+\frac{1}{9} & \text{si } x<0,\end{cases}$ avec $\lambda,\lambda',\mu,\mu'\in\mathbb{R}$.

Exercice 24. L'unique solution est donnée par

$$x\longmapsto\begin{cases}\mathrm{e}^{x}-1 & \text{si } x\leqslant 0\\ \sin x-\cos x+1 & \text{si } 0\leqslant x\leqslant 3\pi/2\\ \mathrm{e}^{-x+3\pi/2}-1 & \text{si } x\geqslant 3\pi/2.\end{cases}$$

Exercice 25. $x\longmapsto a\cos(2x)+a\sin(2x)+\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}$, $a\in\mathbb{R}$.

Exercice 26. **1.** $(\mathcal{E}') : x^2f''+f=0$. **2.** $(\mathcal{E}')$ équivaut à $(\mathcal{E}'') : z''-z'+z=0$, via $z(t)=y(\mathrm{e}^{x})$.

Exercice 27. **1.c** $\dfrac{1+f'(0)^2}{f(0)^2}$. **3.** $\lambda=\pm\dfrac{1}{a}$. **4.** $x\longmapsto\dfrac{1}{\alpha}\operatorname{ch}(\alpha x+\beta)$, avec $\alpha\in\mathbb{R}^*$ et $\beta\in\mathbb{R}$.

2. $f=\operatorname{ch}$ unique solution du problème de Cauchy $\begin{cases}y''-y=0\\ y(0)=1, y'(0)=0.\end{cases}$