

7 | Primitives et calcul intégral

Cahier de calcul : fiches 15 à 19.

Banque CCINP : $\emptyset$.

Primitives

— **Exercice 1** ○○○○ — ☒ Donner une primitive de f sur l'intervalle I .

1. $f(x) = 2x^3 - \frac{1}{x^2}$ et $I =]0, +\infty[$.
2. $f(x) = 3 + \frac{1}{x^2} - \frac{5}{x^3}$ et $I =]-\infty, 0[$.
3. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $I =]0, +\infty[$.
4. $f(x) = \sqrt{x}$ et $I =]0, +\infty[$.
5. $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $I =]0, +\infty[$.
6. $f(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{4}{\sqrt{x}}$ et $I =]0, +\infty[$.
7. $f(x) = e^x$ et $I = \mathbb{R}$.
8. $f(x) = 3x - 2e^x$ et $I = \mathbb{R}$.
9. $f(x) = \frac{1}{x}$ et $I =]0, +\infty[$.
10. $f(x) = \frac{-4}{x}$ et $I =]-\infty, 0[$.
11. $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ et $I =]1, +\infty[$.
12. $f(x) = \frac{3}{(3x-2)^2}$ et $I =]\frac{2}{3}, +\infty[$.
13. $f(x) = e^{2x}$ et $I = \mathbb{R}$.
14. $f(x) = 4e^{0,3x}$ et $I = \mathbb{R}$.
15. $f(x) = xe^{x^2}$ et $I = \mathbb{R}$.
16. $f(x) = (x+1)e^{3x^2+6x-4}$ et $I = \mathbb{R}$.
17. $f(x) = \frac{4x^3 - 3x^2 + 1}{x}$ et $I =]-\infty, 0[$.
18. $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$ et $I =]0, +\infty[$.

— **Exercice 2** ●○○○ — ☒ Déterminer une primitive des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \frac{1}{x^2 + x + 1}$.
2. $x \mapsto \frac{2 - 5x}{1 + x^2}$.
3. $x \mapsto \frac{3x + 2}{2x^2 - 4x + 3}$.
4. $x \mapsto \frac{x + 3}{x^2 - 2x + 5}$.

— **Exercice 3** ●○○○ — ☒ Calculer, en utilisant l'exponentielle complexe,

1. l'intégrale $\int_0^\pi e^t \sin(3t) dt$;
2. une primitive de $x \mapsto \sin x \operatorname{sh} x$.

— **Exercice 4** ●●○○ — ☒

Déterminer, sans aucun calcul d'intégrale, une primitive des fonctions suivantes (on précisera les intervalles maximaux de définition associés).

1. $x \mapsto xe^{-x^2}$.
2. $x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$.
3. $x \mapsto \frac{e^{1/x}}{x^2}$.
4. $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$.
5. $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
6. $x \mapsto \frac{1}{x}(\ln x)^2$.
7. $x \mapsto xe^{-3x^2}$.
8. $x \mapsto \frac{1}{x \ln^4 x}$.
9. $x \mapsto \frac{x^2}{1+x^3}$.
10. $x \mapsto \frac{\sin(2x)}{1+\cos^2 x}$.
11. $x \mapsto \tan^2 x$.
12. $x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x \sqrt{\tan x}}$.
13. $x \mapsto \frac{1}{x + \sqrt{x}}$.
14. $x \mapsto \frac{\ln \ln x}{x}$.
15. $x \mapsto e^{e^x + x}$.
16. $x \mapsto \frac{1}{x + x \ln^2 x}$.
17. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x^3}}$.
18. $x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{1 + \ln x}}$.

— **Exercice 5** ●●○○ — Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Montrer que f possède une et une seule primitive F sur $[0, 1]$ telle que $\int_0^1 F(t) dt = 0$.

— **Exercice 6** ●●○○ — **Une fonction qui n'admet pas de primitive**

Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}$.

— **Exercice 7** ●●○○ — **Primitive d'une fonction non continue**

Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

est la primitive sur $\mathbb{R}$ d'une fonction non continue.

Calculs d'intégrales

— **Exercice 8** ○○○○ — ☒ Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_2^3 (t^2 + t + 1) dt.$
2. $\int_{\frac{3}{2}}^5 \frac{1}{1-2t} dt.$
3. $\int_0^2 \left(2x + 1 + \frac{3}{2x+3} \right) dx.$
4. $\int_0^{\ln 5} (5 + 4e^x - e^{2x}) dx.$
5. $\int_1^0 e^{2u} du.$
6. $\int_{-3}^{-2} \frac{u}{u+1} du.$

— **Exercice 9** ●○○○ — ☒ Calculer les intégrales suivantes, où $n \in \mathbb{N}$.

1. $\int_1^2 \frac{1}{(2x+1)^2} dx.$
2. $\int_{-2}^1 \frac{14}{(4-x)^3} dx.$
3. $\int_e^2 \frac{\ln x}{x} dx.$
4. $\int_{e^{-3}}^{e^{-2}} \frac{dx}{x \ln x}.$
5. $\int_3^4 \frac{x-1}{x^2} dx.$
6. $\int_0^1 \frac{e^x + 1}{e^x + x} dx.$
7. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1+4x}}.$
8. $\int_2^1 e^x \left(\frac{1}{x} + \ln x \right) dx.$
9. $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{4x}{x^2+1} dx.$
10. $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} dx.$
11. $\int_0^1 3e^{-\frac{x}{2}+1} dx.$
12. $\int_1^2 \frac{e^x}{e^x-1} dx.$
13. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x(\ln x)^2}.$
14. $\int_{-1}^{1/2} \frac{x^2}{1-x^3} dx.$
15. $\int_{1/2}^2 (x-1) \left(\frac{x^2}{2} - x + 3 \right) dx.$
16. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$
17. $\int_{1/2}^1 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx.$
18. $\int_0^1 x\sqrt{1+x^2} dx.$
19. $\int_3^4 (3-x)^n dx.$
20. $\int_1^2 (3x-2)^n dx.$
21. $\int_1^2 x(x^2-1)^n dx.$

— **Exercice 10** ●○○○ — ☒

1. a. Déterminer deux réels a et b tels que $\frac{1}{(t+1)(t-2)} = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{t-2}.$
b. En déduire la valeur de $\int_3^5 \frac{dt}{(t+1)(t-2)}.$
2. a. Déterminer trois réels a , b et c tels que $\frac{1}{t(t^2-4)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t-2} + \frac{c}{t+2}.$
b. En déduire la valeur de $\int_3^4 \frac{4}{t(t^2-4)} dt.$

— **Exercice 11** ●●○○ — ☒ Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x dx.$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin(3x) dx.$

— **Exercice 12** ●○○○ — ☒ Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_0^1 \max\{e^t, 2\} dt.$
2. $\int_0^1 |3t-1| dt.$
3. $\int_0^n e^{|t|} dt,$ avec $n \in \mathbb{N}.$
4. $\int_0^4 \sin \frac{|x|\pi}{4} dx.$
5. $\int_{-1}^2 x|x| dx.$
6. $\int_{-2}^5 \frac{|x+1|}{|x|+1} dx.$

— **Exercice 13** ●●○○ — ☐ Une formule sommatoire pour π

1. Montrer que, pour tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[$, $\int_0^{\tan x} \frac{dt}{1+t^2} = x.$
2. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt.$$

3. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$, ce que l'on note $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$

— **Exercice 14** ●●○○ — ☐ Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(k!) \leq (k+1) \ln k - k + 1.$$

Fonction définie par une intégrale

— **Exercice 15** ●○○○ — ☒

1. Montrer que, pour tout réel x , l'intégrale $\int_0^1 e^{tx} dt$ existe.
2. Étudier la monotonie sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = \int_0^1 e^{tx} dt.$

— **Exercice 16** ●●○○ — ☒ Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \int_0^1 f(xt) dt.$$

— **Exercice 17** ●●○○ — ☒ Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$G(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

1. Justifier la définition et la dérivabilité de G .
2. Calculer G' et en déduire la monotonie de G .
3. Montrer que $\lim_{+\infty} G = 0$ et $\lim_0 G = -\infty$.

— **Exercice 18** ●●○○ — ☐ ☒ Étudier la dérivabilité et dériver les fonctions suivantes.

$$1. x \mapsto \int_1^{x^2} e^{5\sqrt{3\ln t}} dt. \quad 2. x \mapsto \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{1+t+t^2}. \quad 3. (\bullet\bullet\bullet) x \mapsto \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\cos(tx)}{t} dt.$$

— **Exercice 19** ○○○○ — Soit $f : x \mapsto \int_{\sin^2 x}^{\cos^2 x} \operatorname{Arcsin}(\sqrt{t}) dt$.

1. Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité de la fonction f .
2. Obtenir une expression simple de f via le calcul de sa dérivée.

— **Exercice 20** ●●○○ — ☒ Soit $\varphi : x \mapsto \int_{1/x}^x \frac{\operatorname{Arctan} t}{t} dt$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

1. Montrer que φ est impaire.
2. Montrer soigneusement que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.
3. Montrer que la fonction $\psi : x \mapsto x\varphi'(x)$ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. En déduire une expression de φ sur $\mathbb{R}_+^*$, puis sur $\mathbb{R}^*$.

Intégration par parties

— **Exercice 21** ●●○○ — ☒ À l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes.

$$\begin{array}{lll} 1. \int_0^1 x e^x dx. & 2. \int_1^2 x \ln x dx. & 3. \int_1^e (x - e) \ln x dx. \\ 4. \int_0^1 x^3 e^{x^2} dx. & 5. \int_1^e (\ln x)^2 dx. & 6. \int_0^2 (2 - x) e^{-x} dx. \\ 7. \int_{-1}^1 x^2 e^x dx. & 8. \int_{1/2}^1 \frac{e^{1/x}}{x^3} dx. & 9. \int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)^2} dx. \end{array}$$

— **Exercice 22** ●●○○ — ☒ Calculer les intégrales suivantes.

$$1. \int_0^1 \operatorname{Arctan} x dx. \quad 2. \int_0^1 x(\operatorname{Arctan} x)^2 dx. \quad 3. \int_1^e (x \ln x)^2 dx.$$

— **Exercice 23** ●●○○ — ☒ À l'aide d'intégrations par parties, déterminer une primitive des fonctions suivantes sur un intervalle à préciser.

$$\begin{array}{lll} 1. x \mapsto \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}. & 2. x \mapsto \cos(\ln x). & 3. x \mapsto x^\alpha \ln x, \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}. \\ 4. \operatorname{Arcsin}. & 5. \operatorname{Arctan}. & 6. x \mapsto x \operatorname{ch} x. \end{array}$$

— **Exercice 24** ●●○○ — ☐ Soit P un polynôme de degré n . Montrer que $x \mapsto P(x) e^x$ admet une primitive de la forme $x \mapsto Q(x) e^x$, avec Q un polynôme de degré n .

— **Exercice 25** ●●○○ — ☒ **Intégrales de Wallis** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt.$$

1. a. Calculer I_0 et I_1 .
b. En intégrant par parties, exprimer I_n en fonction de I_{n-2} , pour $n \geq 2$.
c. En déduire les expressions de I_{2n} et I_{2n+1} en fonction de n , pour $n \in \mathbb{N}$.
2. a. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n I_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2}.$$

- b. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n \sqrt{2n} = \sqrt{\pi}$.

— Exercice 26 ●●● — ? ✓

1. Calculer, pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $I_{p,q} = \int_0^1 x^p (1-x)^q dx$.
2. En déduire une expression simplifiée de $\sum_{k=0}^q \binom{q}{k} \frac{(-1)^k}{p+k+1}$, pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.

— Exercice 27 ●●● — Lemme de Riemann-Lebesgue

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a, b]$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin(nt) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \cos(nt) dt = 0.$$

Changement de variable

— Exercice 28 ●●● — ✓

À l'aide d'un changement de variable, calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1}$ en posant $u = e^x$.
2. $\int_1^2 \frac{dx}{x + 2\sqrt{x}}$ en posant $u = \sqrt{x}$.
3. $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$ en posant $u = e^{\sqrt{x}}$.
4. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$ en posant $u = \sqrt{1+e^x}$.
5. $\int_8^{27} \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x}}$ en posant $u = \sqrt[3]{x}$.
6. $\int_1^4 \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx$ en posant $u = \sqrt{x}$.

— Exercice 29 ●●● — ✓

À l'aide d'un changement de variable, calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_{-1}^1 t^2 \sqrt{1-t^2} dt$ en posant $t = \sin \theta$.
2. $\int_0^1 \frac{dt}{e^t + 1}$ en posant $x = e^t$.
3. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{d\theta}{\cos \theta}$ en posant $x = \sin \theta$.
4. $\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{\ln t}{t^2 + 1} dt$ en posant $u = \frac{1}{t}$.
5. $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2 + t + 1}}$ en posant $x = \sqrt{t^2 + t + 1} - t$.

— Exercice 30 ●●● — ✓ On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^2 t}{\cos(2t)} dt$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 t}{\cos(2t)} dt$.

1. Calculer $I - J$.
2. Calculer $I + J$ en posant $x = \tan t$.
3. En déduire I et J .

— Exercice 31 ●●● — ✓ Formule du roi

1. Soit $a < b$ et $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$. Montrer la *formule du roi*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx.$$

2. Calculer les intégrales suivantes.

$$\text{a. } \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan x) dx. \quad \text{b. } \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1 + \tan x}. \quad \text{c. } \int_{-1}^1 x \ln(1 + \pi^x) dx.$$

— Exercice 32 ●●● — ✓ Déterminer, au moyen d'un changement de variable, une primitive des fonctions suivantes.

1. $\frac{1}{\cos}$ (en posant $t = \sin \theta$) et $\frac{1}{\sin}$ (en posant $t = \cos \theta$).
2. $\frac{1}{\text{ch}}$ et $\frac{1}{\text{sh}}$ (en posant $u = e^t$).
3. $x \mapsto \cos(2 \ln x)$ (en posant $u = e^t$).

— Exercice 33 ●●● — ✓ Primitives par recollement

1. Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto \frac{1}{2 + \cos t}$.
2. Calculer $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \cos t}$.

On posera $u = \tan \frac{t}{2}$.

— Exercice 34 ●●● — ? ✓ Mines-Ponts MP 2022

1. Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
2. Calculer une primitive de $x \mapsto \frac{\sin x}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right)}$ sur $\left] \frac{\pi}{12}, \frac{2\pi}{3} \right[$.

Indications

Exercice 11. Il convient de linéariser.

$$1. \cos^4 x = \frac{1}{8} \cos(4x) + \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{3}{8}.$$

$$2. \cos^2 x \sin(3x) = \frac{1}{4} \sin(5x) + \frac{1}{2} \sin(3x) + \frac{1}{4} \sin(x).$$

Exercice 14. Majorer $\ln p$ par une intégrale de la forme $\int_{\dots}^{\dots} \ln t \, dt$.

Exercice 12. Découper les intégrales à l'aide de la relation de Chasles.

Exercice 13. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2k+1} = \int_0^1 t^{2k} \, dt$.

Exercice 18. 3. Procéder au changement de variable $u = xt$.

Exercice 24. Récurrence sur le degré de P .

Exercice 26. Commencer par montrer que $I_{p,q} = \frac{q}{p+1} I_{p+1,q-1}$.

Exercice 34. 2. Décomposer $\sin$ sous la forme $\sin x = a \sin(x - \frac{\pi}{12}) + b \sin(x + \frac{\pi}{3})$ et voir la question 1 de l'exercice 32 pour déterminer une primitive de $1/\sin$.

Éléments de réponses

Exercice 1. 1. $F(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{x}$. 2. $F(x) = 3x - \frac{1}{x} + \frac{5}{2x^2}$. 3. $F(x) = 2\sqrt{x}$.

$$4. F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} = \frac{2}{3}x^{3/2}. \quad 5. F(x) = -\frac{1}{x} - 2\sqrt{x}. \quad 6. F(x) = -\frac{1}{2x^2} + 8\sqrt{x}.$$

$$7. F(x) = e^x. \quad 8. F(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2e^x. \quad 9. F(x) = \ln x. \quad 10. F(x) = -4\ln(-x) = -4\ln|x|.$$

$$11. F(x) = \frac{-1}{x-1}. \quad 12. F(x) = \frac{-1}{3x-2}. \quad 13. F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}. \quad 14. F(x) = \frac{40}{3}e^{0,3x}.$$

$$15. F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}. \quad 16. F(x) = \frac{1}{6}e^{3x^2+6x-4}. \quad 17. F(x) = \frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \ln(-x).$$

$$18. F(x) = \frac{-2}{\sqrt{x}}.$$

Exercice 2. 1. $\frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt{3}(2x+1)}{3}\right)$. 2. $2 \operatorname{Arctan} x - \frac{5}{2} \ln(x^2 + 1)$.

$$3. \frac{5\sqrt{2}}{2} \operatorname{Arctan}(\sqrt{2}(x-1)) + \frac{3}{4} \ln(2x^2 - 4x + 3).$$

$$4. 2 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}(x-1)\right) + \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x + 5).$$

Exercice 3. 1. $\frac{3}{10}(e^\pi + 1)$. 2. $x \mapsto \frac{1}{2}(\operatorname{ch} x \sin x - \operatorname{sh} x \cos x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. 1. $-\frac{1}{2}e^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$. 2. $2\sqrt{\ln x}$ sur $]1, +\infty[$. 3. $-e^{1/x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$.

$$4. \ln(|\ln x|) \text{ sur }]1, +\infty[\text{ ou }]0, 1[. \quad 5. \sqrt{1+x^2} \text{ sur } \mathbb{R}. \quad 6. \frac{1}{3}(\ln x)^3 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.$$

$$7. -\frac{1}{6}e^{-3x^2} \text{ sur } \mathbb{R}. \quad 8. -\frac{1}{3\ln^3 x} \text{ sur }]0, 1[\text{ ou }]1, +\infty[$$

$$9. \frac{1}{3} \ln|x^3 + 1| \text{ sur }]-\infty, -1[\text{ ou }]-1, +\infty[. \quad 10. -\ln(1 + \cos^2 x) \text{ sur } \mathbb{R}.$$

$$11. -x + \tan x \text{ sur }]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[+ k\pi, k \in \mathbb{Z}. \quad 12. 2\sqrt{\tan x} \text{ sur }]0, \frac{\pi}{2}[+ k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$13. 2 \ln(1 + \sqrt{x}) \text{ sur } \mathbb{R}_+^*. \quad 14. \ln(x) \ln(\ln x) - \ln x \text{ sur }]1, +\infty[. \quad 15. e^{e^x} \text{ sur } \mathbb{R}.$$

$$16. \operatorname{Arctan}(\ln x) \text{ sur } \mathbb{R}_+^*. \quad 17. 2 \operatorname{Arctan}(\sqrt{x}) \text{ sur } \mathbb{R}_+^*. \quad 18. 2\sqrt{1 + \ln x} \text{ sur }]e^{-1}, +\infty[.$$

Exercice 8. 1. $\frac{59}{6}$. 2. $\frac{1}{2} \ln 2 - \ln 3$. 3. $6 + \frac{3}{2} \ln \frac{7}{3}$. 4. $4 + 5 \ln 5$. 5. $\frac{1-e^2}{2}$. 6. $1 + \ln 2$.

Exercice 9. 1. $\frac{1}{15}$. 2. $\frac{7}{12}$. 3. $\frac{(\ln 2)^2 - 1}{2}$. 4. $\ln \frac{2}{3}$. 5. $\ln \frac{4}{3} - \frac{1}{12}$. 6. $\ln(e+1)$. 7. 1.

$$8. -e^2 \ln 2. \quad 9. 2 \ln 3. \quad 10. \frac{1}{3}. \quad 11. 6(e - \sqrt{e}). \quad 12. \ln(e+1). \quad 13. \frac{1}{2}. \quad 14. \frac{4}{3} \ln 2 - \frac{1}{3} \ln 7.$$

$$15. \frac{135}{128}. \quad 16. 2\sqrt{2} - 2. \quad 17. e^2 - e. \quad 18. \frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1). \quad 19. \frac{(-1)^n}{n+1}. \quad 20. \frac{4^{n+1} - 1}{3(n+1)}.$$

$$21. \frac{3^{n+1}}{2(n+1)}.$$

Exercice 10. 1.a. $a = -\frac{1}{3}$ et $b = \frac{1}{3}$. 1.b. $\frac{\ln 2}{3}$.

$$2.a. a = -\frac{1}{4} \text{ et } b = c = \frac{1}{8}. \quad 2.b. \frac{3}{2} \ln 3 - \frac{1}{2} \ln 5 - \ln 2.$$

Exercice 11. 1. $\frac{1}{4} + \frac{3\pi}{32}$. 2. $\frac{7}{15}$.

Exercice 12. 1. $2 \ln 2 + e - 2$. 2. $\frac{5}{6}$. 3. $\frac{e^n - 1}{e - 1}$. 4. $1 + \sqrt{2}$. 5. $\frac{7}{3}$. 6. $5 - 2 \ln 3 + 4 \ln 2$.

Exercice 15. 2. f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16. $f(0)$.

Exercice 17. 2. $G'(x) = \frac{2e^{-x^2} - e^{-x}}{x}$ et G' change de signe en $\frac{1 + \sqrt{1 + 4 \ln 2}}{2}$.

$$3. \lim_0 G = -\infty \text{ et } \lim_{+\infty} G = 0.$$

Exercice 18. 1. $x \mapsto 2x e^{5\sqrt{6} \ln x}$ sur $[1, +\infty[$. 2. $x \mapsto \frac{3x^2}{1+x^3+x^6} - \frac{2x}{1+x^2+x^4}$ sur $\mathbb{R}$.

$$3. x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\cos(2\pi x) - \cos(\pi x)}{x} & \text{sinon} \end{cases} \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Exercice 20. 1. Procéder au changement de variable $u = -t$.

$$2. \varphi'(x) = \frac{1}{x} \left(\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} \right). \quad 4. \varphi(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \ln x & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} \ln(-x) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Exercice 21. 1. 1. 2. $2 \ln 2 - \frac{3}{4}$. 3. $\frac{e^2 - 4e + 1}{4}$. 4. $\frac{1}{2}$. 5. $e - 2$. 6. $1 + e^{-2}$. 7. $e - 5e^{-1}$.

$$8. e^2. \quad 9. \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4}.$$

Exercice 22. 1. $\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$. 2. $\frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}$. 3. $\frac{5}{27}e^3 - \frac{2}{27}$.

Exercice 23. 1. $x \mapsto \frac{x^2 - 2}{3} \sqrt{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$. 2. $x \mapsto \frac{x}{2}(\cos(\ln x) + \sin(\ln x))$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$3. x \mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \left(\ln x - \frac{1}{\alpha+1} \right) \text{ si } \alpha \neq -1 \quad \text{et} \quad x \mapsto \frac{(\ln x)^2}{2} \text{ si } \alpha = -1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.$$

$$4. x \mapsto x \operatorname{Arcsin}(x) + \sqrt{1-x^2} \text{ sur }]-1, 1[. \quad 5. x \mapsto x \operatorname{Arctan}(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \text{ sur } \mathbb{R}.$$

$$6. x \mapsto x \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Exercice 25. 1.a $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$. 1.b $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.

$$1.c \quad I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!^2} \times \frac{\pi}{2} \text{ et } I_{2n+1} = \frac{2^{2n}n!^2}{(2n+1)!}$$

$$\text{Exercice 26. } 1. \text{ et } 2. \quad \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} \frac{(-1)^k}{p+k+1} = I_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

$$\text{Exercice 28. } 1. \ln 2 - \ln(e+1) + 1. \quad 2. 2 \ln \left(\frac{2+\sqrt{2}}{3} \right). \quad 3. 2. \quad 4. \ln \left(\frac{(\sqrt{1+e}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{1+e}+1)(\sqrt{2}-1)} \right).$$

$$5. 3 \ln \frac{4}{3} + \frac{9}{2}. \quad 6. 1 + 4 \ln \frac{2}{3}.$$

$$\text{Exercice 29. } 1. \frac{\pi}{8}. \quad 2. \ln 2 - \ln(e+1) + 1. \quad 3. \frac{\ln 3}{2}. \quad 4. 0. \quad 5. \ln \left(\frac{2\sqrt{3}+3}{3} \right).$$

$$\text{Exercice 30. } I - J = \frac{\pi}{6} \text{ et } I + J = \frac{\ln(7+4\sqrt{3})}{4}.$$

$$\text{Exercice 31. } 2.a \quad \frac{\pi}{8} \ln 2. \quad 2.b \quad \frac{\pi - 2 \ln 2}{8}. \quad 2.c \quad \frac{\ln \pi}{3}.$$

$$\text{Exercice 32. } 1. x \mapsto \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right) \text{ sur }]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[+ \pi\mathbb{Z} \quad \text{et}$$

$$x \mapsto \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x} \right) = \ln \left(\tan \frac{x}{2} \right) \text{ sur }]0, \pi[+ \pi\mathbb{Z}.$$

$$2. x \mapsto 2 \operatorname{Arctan}(e^x) \text{ sur } \mathbb{R} \quad \text{et} \quad x \mapsto \ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right| \text{ sur } \mathbb{R}^*.$$

$$3. x \mapsto \frac{x}{5} (\cos(2 \ln x) + 2 \sin(2 \ln x)) \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.$$

Exercice 33. 1. La primitive F sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 est définie, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, par

$$F|_{](2n-1)\pi, (2n+1)\pi[}: t \mapsto \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan \frac{t}{2} \right) + \frac{2n\pi}{\sqrt{3}}. \quad 2. \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Exercice 34. } 1. \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

$$2. x \mapsto \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \ln \left(\tan \left(\frac{3x+\pi}{6} \right) \right) + (2-\sqrt{3}) \ln \left(\tan \left(\frac{12x-\pi}{24} \right) \right).$$