

6 | Nombres complexes

Cahier de calcul : fiches 12 à 14.

Banque CCINP : exercices 32 et 33.

Écriture algébrique

— Exercice 1 ●○○○ — ✓ Sachant $i^2 = -1$, simplifier les expressions suivantes.

1. i^3 . 2. i^4 . 3. i^5 . 4. i^{14} . 5. i^{100} . 6. i^{-1} . 7. i^{-3} .

— Exercice 2 ○○○○ — ✓

Déterminer l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes ci-dessous.

1. $z_1 = 3(2 - i) + i(3 + 2i)$. 2. $z_2 = (5 + 2i)(1 - i)$. 3. $z_3 = -5i(5 - 4i) - 3i$.
 4. $z_4 = (5 + 2i)^2$. 5. $z_5 = (2 - i)^2 - 2(1 + 3i)^2$. 6. $z_6 = (5 + 2i)(5 - 2i)$.
 7. $z_7 = \frac{1 + i}{i}$. 8. $z_8 = \frac{1}{1 - i}$. 9. $z_9 = \frac{-2 + i}{2 + i}$.

— Exercice 3 ○○○○ — ✓

Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de chacun des complexes suivants.

1. $(2 + i)^2$. 2. $\frac{3 - 4i}{1 + i}$. 3. $\frac{\sqrt{3} - i}{1 + \sqrt{3} \times i}$.

Conjugué et module

— Exercice 4 ○○○○ — ✓

Donner l'écriture algébrique du conjugué de chacun des nombres complexes suivants.

1. $1 + i$. 2. $2i - 3$. 3. $i(1 + 2i)$. 4. $\frac{1}{i}$. 5. $\frac{2}{2 - i}$. 6. $(1 - i)(1 + i)$.

— Exercice 5 ○○○○ — ✓

Déterminer le module des nombres complexes suivants.

1. $1 - 2i$. 2. $-5i$. 3. $(3 - 2i)(2 + i)$. 4. $-i(1 - 2i)$. 5. $\frac{1 + i\sqrt{3}}{3i}$. 6. $\frac{3 - i\sqrt{3}}{-\sqrt{3} + i}$.

— Exercice 6 ●○○○ — ✓

Déterminer la forme algébrique, le conjugué et le module du nombre complexe

$$\frac{(2 - i)(5 + 2i)}{3 - 4i}.$$

— Exercice 7 ●●○○ — ✓ Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ les systèmes suivants.

1. $\begin{cases} (1 + i)z - it = 2 + i \\ (2 + i)z + (2 - i)t = 2i \end{cases}$ 2. $\begin{cases} (3 - i)z + (2 + i)t = 3 + 4i \\ (5 - 7i)z - (2 - 3i)t = 5 + 8i \end{cases}$

— Exercice 8 ●○○○ — Formule du parallélogramme

Montrer que, pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$,

$$|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2).$$

Pourquoi cette relation est-elle nommée formule du parallélogramme ?

— Exercice 9 ●●○○ — ✓ Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{3i\}$, on pose $f(z) = \frac{3z - i}{z - 3i}$.

1. Déterminer les complexes z tels que $f(z) \in \mathbb{R}$.
 2. Déterminer les complexes z tels que $|f(z)| = 1$.
 3. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{3i\}$ sur une partie de $\mathbb{C}$ à déterminer et expliciter sa réciproque.

— Exercice 10 ●○○○ — ✓ Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \neq 1$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \right| \leq \frac{1 - |z|^{n+1}}{1 - |z|}.$$

— Exercice 11 ●●○○ — ✓

1. Déterminer une factorisation de $a^2 + b^2$ dans $\mathbb{C}$, pour tous $a, b \in \mathbb{C}$.
 2. Soit $m, n \in \mathbb{N}$. Montrer que si m et n sont chacun la somme de deux carrés d'entiers, leur produit mn l'est aussi.

Équations

— **Exercice 12** ●●○○ — ☒ Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1. a. $3z + iz = 0$. b. $z + 2iz = i$. c. $z + 2 = i(z + 1)$. d. $\frac{z-5}{z-i} = i$.
2. $(iz + 1)(z + 3i)(z - 1 + 4i) = 0$.
3. a. $z^2 - 3z + 4 = 0$. b. $z^2 - 4z + 4 = 0$. c. $z^2 + (4 - 3i)z = 2 + 8i$.
d. $z^2 + 3 = 0$. e. $3z^2 + 3z + 2 = 0$. f. $6z^2 + (21 - 14i)z + 5 - 37i = 0$.
4. a. $z^4 + 3z^2 + 2 = 0$. b. $z^4 - 32z^2 - 144 = 0$.
5. Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ les systèmes suivants d'inconnues (z, z') .

$$\text{a. } \begin{cases} 2iz + z' = 2i \\ 3z - iz' = 1. \end{cases} \quad \text{b. } \begin{cases} zz' = 5 \\ z + z' = 2. \end{cases} \quad \text{c. } \begin{cases} zz' = -5i \\ z + z' = 3i - 3. \end{cases}$$

6. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

$$\text{a. } 2\bar{z} = i - 1. \quad \text{b. } (2z + i - 1)(i\bar{z} + i - 2) = 0. \quad \text{c. } \frac{\bar{z} - 1}{\bar{z} + 1} = i.$$

— **Exercice 13** ●○○○ — ☒ Trouver les complexes p et q tels que l'équation $z^2 + pz + q = 0$ admette pour solutions $1 + 2i$ et $3 - 5i$.

— **Exercice 14** ●○○○ — ☒ On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(\mathcal{E}_\lambda) : x^2 - 3x + 4 = \lambda$ dépendant du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de λ l'équation $(\mathcal{E}_\lambda)$ admet-elle deux solutions distinctes conjuguées ?

Exponentielle complexe et forme trigonométrique

— **Exercice 15** ●○○○ — ☒

1. Déterminer une forme trigonométrique des nombres suivants.

$$\text{a. } 1 - \sqrt{2}. \quad \text{b. } -5i. \quad \text{c. } 2 - i. \quad \text{d. } (-3 + i\sqrt{3})^{19}. \quad \text{e. } -\frac{1 + 2i}{3 + 4i}.$$

2. Déterminer la forme algébrique de $(1 + i\sqrt{3})^{1000}$.

3. Déterminer une forme trigonométrique de $1 + e^{i\theta}$, où $\theta \in [0, 2\pi]$.

— **Exercice 16** ●●○○ — ☒ Déterminer tous les entiers n pour lesquels.

1. $(1 + i)^n \in \mathbb{R}$.
2. $(\sqrt{3} + i)^n \in i\mathbb{R}$.

— **Exercice 17** ●○○○ — ☒ Simplifier $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right)$, pour tout $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$.

— **Exercice 18** ●●○○ — ☒ Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $z = e^{i\theta}$. Déterminer une forme trigonométrique de $1 + z + z^2$.

— **Exercice 19** ●●○○ — ☒ Soit $a, b, c \in \mathbb{U}$. Montrer que

$$|a + b + c| = |ab + bc + ca|.$$

— **Exercice 20** ●●○○ — ☒ Soit $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$.

Montrer que $z \mapsto \frac{z + \omega}{\bar{\omega}z + 1}$ est une bijection de $\mathbb{U}$ sur $\mathbb{U}$ et déterminer sa réciproque.

— **Exercice 21** ●●○○ — ☒

1. Linéariser les expressions suivantes.

$$\text{a. } \sin x \cos^2(2x). \quad \text{b. } \sin^3(2x) \cos(3x).$$

2. Calculer les intégrales suivantes.

$$\text{a. } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin(3x) \, dx. \quad \text{b. } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^2 x \, dx.$$

— **Exercice 22** ●○○○ — ☒

1. Déterminer les racines carrées de $i + \sqrt{3}$ sous formes algébrique et trigonométrique.

2. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

— **Exercice 23** ●●○○ — ☒

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos x$.

2. En déduire une expression explicite de

$$\text{a. } \cos^2 \frac{\pi}{10}. \quad \text{b. } \cos \frac{\pi}{5}. \quad \text{c. } \sin \frac{\pi}{5}.$$

Exercice 24 ●●○○ — ☒

- Résoudre l'équation $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
 - Soit z une solution de cette équation. On pose $x = z + \frac{1}{z}$. Montrer que x est solution d'une équation simple, puis la résoudre.
- En déduire une expression explicite de $\cos \frac{2\pi}{5}$.

Exercice 25 ●●○○ — ☒ Soit $n \in \mathbb{N}$.

Exprimer $\frac{\sin(nx)}{\sin x}$ sous la forme d'un polynôme en $\cos x$.

Exercice 26 ●●○○ — ☒ Simplifier, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

- $\sum_{k=0}^n \sin(kx)$.
- $\sum_{k=0}^n \cos(kx + y)$.
- $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx)$.

Exercice 27 ●●○○ — ☒ Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

- $e^z = 1 + i$.
- $e^z = -5 - 12i$.
- $e^z + e^{-z} = 1$.

Racines n^{es} **Exercice 28** ●○○○ — ☒

- Déterminer les racines carrées des complexes suivants.
 - $3 - 4i$.
 - $-15 + 8i$.
 - $7 - 24i$.
 - $9 + 40i$.
 - $48 - 2i$.
- Calculer les racines quatrièmes de $-119 + 120i$.

Exercice 29 ●●○○ — ☒ Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

- $z^8 - 3z^4 + 2 = 0$.
- $z^6 - 2 \cos \varphi z^3 + 1 = 0$, avec $\varphi \in \mathbb{R}$.

Exercice 30 ●●○○ — ☒

Résoudre les équations suivantes d'inconnues $z \in \mathbb{C}$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

- $(z + 2)^3 = 3i$.
- $(z - 1)^4 = 4 + 4i$.
- $z^n + 1 = 0$.
- $z^n = \bar{z}$.

Exercice 31 ●●○○ — ☒ A-t-on $\mathbb{U} = \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{U}_n$?**Exercice 32** ●●○○ — **Banque d'exercices CCINP 2025 (84)**

- Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
- En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z + i)^n = (z - i)^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

Exercice 33 ●●○○ — **Banque d'exercices CCINP 2025 (89)**

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 2$. On pose $z = e^{2i\pi/n}$.

- On suppose que $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Déterminer alors le module et un argument du complexe $z^k - 1$.
- On pose $S = \sum_{k=0}^{n-1} |z^k - 1|$. Montrer que $S = \frac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

Exercice 34 ●●○○ — ☒ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier les expressions suivantes.

- $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$.
- $\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$.
- $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} (1 + \omega)^n$.
- $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} |\omega - 1|$.

Exercice 35 ●●○○ — On pose $j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

- Calculer $(1 + j)^n$ et $(1 + j^2)^n$ suivant les valeurs de n .
- Pour z complexe quelconque, comparer

$$(z + 1)(z + j)(z + j^2) \quad \text{et} \quad (1 + z)(1 + jz)(1 + j^2z).$$
- Soit a, b et c des complexes quelconques.
 - Calculer $(a + b)(aj + bj^2)(aj^2 + bj)$.
 - En déduire une factorisation de $(a + bj + cj^2) + (a + bj^2 + cj)^3$.
- Soit a, b et c des complexes quelconques, on pose $x = a + b + c$, $y = a + bj + cj^2$ et $z = a + bj^2 + cj$. Calculer $x^3 + y^3 + z^3$.

Exercice 36 ●●○○ — ☒ ☐

- Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} j^k$ et $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (j^2)^k$, où $j = e^{2i\pi/3}$.
- En déduire une expression de $\sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3k}$.

Application à la géométrie

— **Exercice 37** ○○○○ — ☒ Dans chacun des cas suivants, représenter l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité proposée.

1. $|z| = 3$.
2. $\operatorname{Re}(z) = -2$.
3. $\operatorname{Im}(z) = 1$.

— **Exercice 38** ●○○○ — ☒ On note A, B et C les trois points d'affixes respectives $a = 1 + i$, $b = -i$ et $c = -1 + 2i$. Que peut-on dire du triangle ABC ?

— **Exercice 39** ●○○○ — ☒ À quelle condition nécessaire et suffisante sur z

1. z et z^2 sont-ils les affixes de deux vecteurs
 - a. colinéaires ?
 - b. orthogonaux ?
2. $1, z$ et z^2 sont-ils les affixes de trois points alignés ?
3. z et $\bar{z}$ sont-ils les affixes de deux vecteurs orthogonaux ?
4. $z, \frac{1}{z}$ et $z - 1$ sont-ils les affixes de points situés sur un même cercle de centre O ?
5. z, z^2 et z^3 sont-ils les affixes des sommets d'un triangle rectangle en z ?
6. z et ses deux racines carrées forment-ils un triangle rectangle en z ?

— **Exercice 40** ●○○○ — ☒ On note A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe 5. Déterminer le lieu des points M pour lesquels

1. $MA = MB$.
2. $MB = MA\sqrt{2}$.

— **Exercice 41** ●○○○ — ☒

1. Caractériser géométriquement la similitude $z \mapsto 2(1 + i)z - 7 - 4i$.
2. Déterminer l'expression de la rotation de centre $1 + i$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$.
3. On note r la rotation de centre 1 et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$ et s la symétrie centrale de centre $3 + i$. Caractériser géométriquement $s \circ r$.
4. On note r la rotation de centre $2 + i$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ et r' la rotation de centre $3 - 2i$ et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{3}$. Caractériser géométriquement $r' \circ r$.

— **Exercice 42** ●○○○ — ☒

On considère l'application f qui à un point M d'affixe z associe le point M' d'affixe e^z . Déterminer l'image des droites d'équations $x = a$ et $y = b$ par f .

— **Exercice 43** ●○○○ — Dans le plan complexe, démontrer que les points d'affixes a, b et c sont alignés si et seulement si

$$a\bar{b} + b\bar{c} + c\bar{a} = b\bar{a} + c\bar{b} + a\bar{c}.$$

— **Exercice 44** ●○○○ — ☒ Soit a, b, c et d quatre nombres complexes vérifiant

$$a + c = b + d \quad \text{et} \quad a + ib = c + id.$$

Quelle figure forme leur image dans le plan ?

— **Exercice 45** ●●○○ —

Vérifier qu'une condition nécessaire et suffisante pour que les points d'affixes a, b et c dans le plan complexe soient les sommets d'un triangle équilatéral est

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0.$$

— **Exercice 46** ●●○○ — ☒ Interpréter géométriquement la relation

$$e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = 0,$$

où x, y et z sont des réels.

Indications

Exercice 36. 2. Un découpage des sommes de la question 1 selon la classe de congruence modulo 3 de l'indice k permet de les exprimer comme des combinaisons linéaires des trois sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3k}, \quad \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/3 \rfloor} \binom{n}{3k+1} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{\lfloor (n-2)/3 \rfloor} \binom{n}{3k+2}.$$

Éléments de réponses

Exercice 1. Le résultat dépend du reste de l'exposant dans la division euclidienne par 4.

1. $-i$. 2. 1. 3. i . 4. -1 . 5. 1. 6. $-i$. 7. i .

Exercice 2. $z_1 = 4$. $z_2 = 7 - 3i$. $z_3 = -20 - 28i$. $z_4 = 21 + 20i$. $z_5 = 19 - 16i$. $z_6 = 29$.
 $z_7 = 1 - i$. $z_8 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$. $z_9 = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$.

Exercice 3. 1. $3 + 4i$. 2. $-\frac{1}{2} - \frac{7}{2}i$. 3. $-i$.

Exercice 4. 1. $1 - i$. 2. $-3 - 2i$. 3. $-2 - i$. 4. i . 5. $\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$. 6. 2.

Exercice 5. 1. $\sqrt{5}$. 2. 5. 3. $\sqrt{65}$. 4. $\sqrt{5}$. 5. $\frac{2}{3}$. 6. $\sqrt{3}$.

Exercice 6. $z = \frac{8}{5} + \frac{9}{5}i$, $\bar{z} = \frac{8}{5} - \frac{9}{5}i$, et $|z| = \sqrt{\frac{29}{5}}$.

Exercice 7. 1. $(z, t) = (\frac{6-9i}{13}, \frac{-16+11i}{13})$. 2. $(z, t) = (i, 1)$.

Exercice 9. 1. $i\mathbb{R} \setminus \{3i\}$. 2. $z \in \mathbb{U}$. 3. $f^{-1}(z) = \frac{3iz - i}{z - 3}$.

Exercice 10. Combiner la formule donnant la somme d'une progression géométrique et l'égalité triangulaire.

Exercice 11. Si $m = m'^2 + m''^2$ et $n = n'^2 + n''^2$, alors $mn = (m'n' - m''n'')^2 + (m'n'' + m''n')^2$.

Exercice 12. 1.a. $\{0\}$. 1.b. $\left\{\frac{1}{5}(2+i)\right\}$. 1.c. $\left\{-\frac{1}{2}(3+i)\right\}$. 1.d. $\{3+3i\}$.

2. $\{i, -3i, 1-4i\}$. 3.a. $\left\{\frac{3 \pm i\sqrt{7}}{2}\right\}$. 3.b. $\{2\}$. 3.c. $\{2i, -4+i\}$. 3.c. $\{\pm i\sqrt{3}\}$.

3.d. $\left\{\frac{-3 \pm i\sqrt{15}}{6}\right\}$. 3.f. $\left\{\frac{i-9}{3}, \frac{4i-1}{2}\right\}$. 4.a. $\{\pm i, \pm i\sqrt{2}\}$. 4.b. $\{\pm 6, \pm 2i\}$.

5.a. $\{(-1, 4i)\}$. 5.b. $\{(1+2i, 1-2i), (1-2i, 1+2i)\}$.

5.c. $\{(-2+i, -1+2i), (-1+2i, -2+i)\}$.

6.a. $\left\{\frac{-1-i}{2}\right\}$. 6.b. $\left\{-1-2i, \frac{1-i}{2}\right\}$. 6.c. $\{-i\}$.

Exercice 13. $p = -(1+2i+3-5i) = -4+3i$ et $q = (1+2i)(3-5i) = 13+i$.

Exercice 14. $\lambda < \frac{7}{4}$.

Exercice 15. 1.a. $(\sqrt{2}-1)e^{i\pi}$. 1.b. $5e^{-i\frac{\pi}{2}}$. 1.c. $\sqrt{5}e^{-i\operatorname{Arctan}(1/2)}$. 1.d. $(2\sqrt{3})^{19}e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

1.e. $\frac{1}{\sqrt{5}}e^{i(\pi+\operatorname{Arctan}(2/11))}$. 2. $-2^{999}-2^{999}\sqrt{3}i$. 3. $\begin{cases} 2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}} & \text{si } 0 \leq \theta < \pi \\ -2\cos\frac{\theta}{2}e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)} & \text{si } \pi < \theta \leq 2\pi \\ \text{impossible} & \text{si } \theta = \pi. \end{cases}$

Exercice 16. 1. $n \in 4\mathbb{Z}$. 2. $n \in 3+6\mathbb{Z}$.

Exercice 17. $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{1}{2}$.

Exercice 18. $1+e^{i\theta}+e^{2i\theta} = e^{i\theta}(1+e^{i\theta}+e^{-i\theta}) = (1+2\cos\theta)e^{i\theta}$, il reste alors à gérer le signe de $1+2\cos\theta$.

Exercice 19. Passer au carré des modules et utiliser $z\bar{z} = 1$, pour $z \in \mathbb{U}$.

Exercice 20. La réciproque est $z \mapsto \frac{z-\omega}{1-\bar{\omega}z}$.

Exercice 21. 1.a. $\frac{1}{4}\sin(5x) - \frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{1}{2}\sin(x)$.

1.b. $-\frac{1}{8}\sin(9x) + \frac{3}{8}\sin(5x) - \frac{1}{8}\sin(3x) - \frac{3}{8}\sin(x)$. 2.a. $\frac{5}{12}$. 2.b. $\frac{\pi}{32}$.

Exercice 22. 1. $\pm\sqrt{2}e^{i\pi/12} = \pm\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} \pm i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}$. 2. $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

Exercice 23. 1. $\cos(5x) = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$.

2.a. $\frac{5+\sqrt{5}}{8}$. 2.b. $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$. 2.c. $\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

Exercice 24. 1.a. L'équation équivaut à $\frac{z^5-1}{z-1} = 0$ et l'ensemble des solutions est

$\left\{e^{\pm\frac{2i\pi}{5}}, e^{\pm\frac{4i\pi}{5}}\right\}$. 1.b. x est solution de $X^2+X-1=0$, dont les solutions sont $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

2. $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Exercice 25. $\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p+1} (X^2-1)^p X^{n-2p}$.

Exercice 26. 1. $\begin{cases} 0 & \text{si } x \in 2\pi\mathbb{Z} \\ \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} & \text{sinon.} \end{cases}$

2. $\begin{cases} (n+1)\cos y & \text{si } x \in 2\pi\mathbb{Z} \\ \cos\left(\frac{n}{2}+y\right)\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}} & \text{sinon.} \end{cases}$ 3. $2^n\left(\cos\frac{x}{2}\right)^n \cos\frac{nx}{2}$.

Exercice 27. 1. $\frac{\ln 2}{2} + i\frac{\pi}{4} + 2i\pi\mathbb{Z}$. 2. $\ln 13 + i\pi + i\operatorname{Arctan}\frac{12}{5} + 2i\pi\mathbb{Z}$. 3. $\pm i\frac{\pi}{3} + 2i\pi\mathbb{Z}$.

Exercice 28. 1.a. $\pm(2-i)$. 1.b. $\pm(1+4i)$. 1.c. $\pm(4-3i)$. 1.d. $\pm(5+4i)$.

2. $\pm(3+2i)$ et $\pm(2-3i)$.

Exercice 29. 1. $\{\pm 1, \pm i, \pm\sqrt[4]{2}, \pm i\sqrt[4]{2}\}$. 2. $\left\{\exp\left(i\frac{2k\pi \pm \varphi}{3}\right) \mid k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket\right\}$.

Exercice 30. 1. $\left\{ \sqrt[3]{3} \exp\left(\frac{i\pi(1+4k)}{6}\right) - 2 \mid k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket \right\}$.

2. $\left\{ 2^{5/8} \exp\left(\frac{i\pi(8k+1)}{16}\right) + 1 \mid k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket \right\}$. 3. $\left\{ \exp\left(\frac{i\pi(2k+1)}{n}\right) \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$.

4. $\begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } n = 1 \\ \{0\} \cup \left\{ \exp\left(\frac{2ik\pi}{n+1}\right) \mid k \in \llbracket 0, n \rrbracket \right\} & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$

Non. Précisément, $e^{i\theta} \in \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{U}_n \iff \frac{\theta}{\pi} \in \mathbb{Q}$.

Exercice 31. Non.

Exercice 34. 1. $\begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ 2. $(-1)^{n-1}$. 3. $2n$. 4. $2 \frac{\cos \frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n}}$.

Exercice 36. 1. $2^n, (1+j)^n$ et $(1+j^2)^n$. 2. $\frac{1}{3}(2^n + 2 \cos \frac{n\pi}{3})$.

Exercice 37. 1. Cercle de centre O et de rayon 3. 2. Droite d'équation $x = -2$.

3. Droite d'équation $y = 1$.

Exercice 38. Triangle isocèle et rectangle en A .

Exercice 39. 1.a. $z \in \mathbb{R}$. 1.b. $z \in i\mathbb{R}$. 2. $z \in \mathbb{R}$. 3. $z = r e^{\pm i\pi/4}$ avec $r \in \mathbb{R}^*$. 4. $e^{\pm i\pi/3}$.

5. $z = 0$ ou $z = 1$ ou $\operatorname{Re}(z) = -1$. 6. $z \in \mathbb{U} \cup \{0\}$.

Exercice 40. 1. Droite d'équation $x = 3$. 2. Cercle de centre $(-3, 0)$ et de rayon $4\sqrt{2}$.

Exercice 41. 1. Similitude de centre $3 - 2i$, de rapport $2\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

2. $z \mapsto \frac{1+i}{\sqrt{2}}z + 1 + i(1 - \sqrt{2})$.

3. $s \circ r : z \mapsto -iz + 5 + 3i$ est la rotation de centre $4 - i$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

4. $r' \circ r : z \mapsto z + \frac{1+3\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}-3}{2}i$ est la translation de vecteur $\frac{1+3\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}-3}{2}i$.

Exercice 42. Cercle de centre O et de rayon e^a . Demi-droite d'origine O et formant un angle b avec l'axe des abscisses.

Exercice 44. $ABCD$ est un losange.

Exercice 46. Sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle unité.