6 Nombres complexes

Cahier de calcul : fiches 12 à 14. **Banque CCINP :** exercices 31 et 32.

Écriture algébrique

Exercice 1 ●○○○ Sachant $i^2 = -1$, simplifier les expressions suivantes :

1. i^3. **2.** i^4. **3.** i^5. **4.** i^{14}. **5.** i^{100}. **6.** i^{-1}. **7.** i^{-3}.

Exercice 2 ○○○○ Déterminer l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes ci-dessous :

1. $z_1 = 3(2-i) + i(3+2i)$. **2.** $z_2 = (5+2i)(1-i)$. **3.** $z_3 = -5i(5-4i) - 3i$.
4. $z_4 = (5+2i)^2$. **5.** $z_5 = (2-i)^2 - 2(1+3i)^2$. **6.** $z_6 = (5+2i)(5-2i)$.
7. $z_7 = \dfrac{1+i}{i}$. **8.** $z_8 = \dfrac{1}{1-i}$. **9.** $z_9 = \dfrac{-2+i}{2+i}$.

Exercice 3 ○○○○ Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de chacun des complexes suivants :

1. $(2+i)^2$. **2.** $\dfrac{3-4i}{1+i}$. **3.** $\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+\sqrt{3}\times i}$.

Conjugué et module

Exercice 4 ○○○○ Donner l'écriture algébrique du conjugué de chacun des nombres complexes suivants :

1. $1+i$. **2.** $2i-3$. **3.** $i(1+2i)$. **4.** $\dfrac{1}{i}$. **5.** $\dfrac{2}{2-i}$. **6.** $(1-i)(1+i)$.

Exercice 5 ○○○○ Déterminer le module des nombres complexes suivants :

1. $1-2i$. **2.** $-5i$. **3.** $(3-2i)(2+i)$. **4.** $-i(1-2i)$. **5.** $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{3i}$. **6.** $\dfrac{3-i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+i}$.

Exercice 6 ●○○○ Déterminer la forme algébrique, le conjugué et le module du nombre complexe :

$$\frac{(2-i)(5+2i)}{3-4i}.$$

Exercice 7 ●●○○ Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} (1+i)z - it = 2+i \\ (2+i)z + (2-i)t = 2i \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} (3-i)z + (2+i)t = 3+4i \\ (5-7i)z - (2-3i)t = 5+8i \end{cases}$

Exercice 8 ●○○○ **Formule du parallélogramme**
Montrer que, pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$,

$$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right).$$

Pourquoi cette relation est-elle nommée formule du parallélogramme ?

Exercice 9 ●●○○ Pour $z \in \mathbb{C}\backslash\{3i\}$, on pose $f(z) = \dfrac{3z-i}{z-3i}$.

1. Déterminer les complexes z tels que $f(z) \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer les complexes z tels que $|f(z)| = 1$.
3. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{C}\backslash\{3i\}$ sur une partie de $\mathbb{C}$ à déterminer et expliciter sa réciproque.

Exercice 10 ●○○○ Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \neq 1$. Montrer que

$$\left|\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right| \leqslant \frac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|}.$$

Exercice 11 ●●○○

1. Déterminer une factorisation de a^2+b^2 dans $\mathbb{C}$, pour tous $a, b \in \mathbb{C}$.
2. Soit $m, n \in \mathbb{N}$. Montrer que si m et n sont chacun la somme de deux carrés d'entiers, leur produit mn l'est aussi.

Équations

Exercice 12 ●●○○ Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. **a.** $3z + iz = 0$. **b.** $z + 2iz = i$. **c.** $z + 2 = i(z+1)$. **d.** $\dfrac{z-5}{z-i} = i$.
2. $(iz+1)(z+3i)(z-1+4i) = 0$.
3. **a.** $z^2 - 3z + 4 = 0$. **b.** $z^2 - 4z + 4 = 0$. **c.** $z^2 + (4-3i)z = 2 + 8i$.
   d. $z^2 + 3 = 0$. **e.** $3z^2 + 3z + 2 = 0$. **f.** $6z^2 + (21-14i)z + 5 - 37i = 0$.
4. **a.** $z^4 + 3z^2 + 2 = 0$. **b.** $z^4 - 32z^2 - 144 = 0$.
5. Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ les systèmes suivants d'inconnues (z, z') :

   a. $\begin{cases} 2iz + z' = 2i \\ 3z - iz' = 1. \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} zz' = 5 \\ z + z' = 2. \end{cases}$ **c.** $\begin{cases} zz' = -5i \\ z + z' = 3i - 3. \end{cases}$
6. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

   a. $2\overline{z} = i - 1$. **b.** $(2z + i - 1)(i\overline{z} + i - 2) = 0$. **c.** $\dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}+1} = i$.

Exercice 13 ●○○○ Trouver les complexes p et q tels que l'équation $z^2 + pz + q = 0$ admette pour solutions $1 + 2i$ et $3 - 5i$.

Exercice 14 ●○○○ On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(\mathcal{E}_\lambda) : x^2 - 3x + 4 = \lambda$ dépendant du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de λ l'équation $(\mathcal{E}_\lambda)$ admet-elle deux solutions distinctes conjuguées ?

Exponentielle complexe et forme trigonométrique

Exercice 15 ●○○○

1. Déterminer une forme trigonométrique des nombres suivants :

   a. $1 - \sqrt{2}$. **b.** $-5i$. **c.** $2 - i$. **d.** $(-3 + i\sqrt{3})^{19}$. **e.** $-\dfrac{1+2i}{3+4i}$.
2. Déterminer la forme algébrique de $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^{1000}$.
3. Déterminer une forme trigonométrique de $1 + \mathrm{e}^{i\theta}$, où $\theta \in [0\,, 2\pi]$.

Exercice 16 ●●○○ Déterminer tous les entiers n pour lesquels :

1. $(1+i)^n \in \mathbb{R}$. **2.** $(\sqrt{3} + i)^n \in i\mathbb{R}$.

Exercice 17 ●○○○ Simplifier $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{1-z}\right)$, pour tout $z \in \mathbb{U}\backslash\{1\}$.

Exercice 18 ●●○○ Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $z = \mathrm{e}^{i\theta}$. Déterminer une forme trigonométrique de $1 + z + z^2$.

Exercice 19 ●●○○ Soit $a, b, c \in \mathbb{U}$. Montrer que $|a+b+c| = |ab+bc+ca|$.

Exercice 20 ●●○○ Soit $\omega \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{U}$. Montrer que $z \longmapsto \dfrac{z+\omega}{\overline{\omega}z+1}$ est une bijection de $\mathbb{U}$ sur $\mathbb{U}$ et déterminer sa réciproque.

Exercice 21 ●●○○

1. Linéariser les expressions suivantes :

   a. $\sin x \cos^2(2x)$. **b.** $\sin^3(2x)\cos(3x)$.
2. Calculer les intégrales suivantes :

   a. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin(3x)\,\mathrm{d}x$. **b.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^2 x\,\mathrm{d}x$.

Exercice 22 ●○○○

1. Déterminer les racines carrées de $i + \sqrt{3}$ sous formes algébrique et trigonométrique.
2. En déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 23 ●●○○

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos x$.
2. En déduire une expression explicite de :

   a. $\cos^2 \dfrac{\pi}{10}$. **b.** $\cos \dfrac{\pi}{5}$. **c.** $\sin \dfrac{\pi}{5}$.

Exercice 24 ●●○○

1. **a.** Résoudre l'équation $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

   b. Soit z une solution de cette équation. On pose $x = z + \dfrac{1}{z}$. Montrer que x est solution d'une équation simple, puis la résoudre.

2. En déduire une expression explicite de $\cos \dfrac{2\pi}{5}$.

Exercice 25 ●●●○ Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $\dfrac{\sin(nx)}{\sin x}$ sous la forme d'un polynôme en $\cos x$.

Exercice 26 ●●○○ Simplifier, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$. **2.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx+y)$. **3.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$.

Exercice 27 ●●○○ Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. $\mathrm{e}^z = 1 + i$. **2.** $\mathrm{e}^z = -5 - 12i$. **3.** $\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z} = 1$.

Racines $n$es

Exercice 28 ●○○○

1. Déterminer les racines carrées des complexes suivants :

   a. $3 - 4i$. **b.** $-15 + 8i$. **c.** $7 - 24i$. **d.** $9 + 40i$. **e.** $48 - 2i$.

2. Calculer les racines quatrièmes de $-119 + 120i$.

Exercice 29 ●●○○ Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. $z^8 - 3z^4 + 2 = 0$. **2.** $z^6 - 2\cos\varphi\, z^3 + 1 = 0$, avec $\varphi \in \mathbb{R}$.

Exercice 30 ●●○○ Résoudre les équations suivantes d'inconnues $z \in \mathbb{C}$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $(z+2)^3 = 3i$. **2.** $(z-1)^4 = 4 + 4i$. **3.** $z^n + 1 = 0$. **4.** $z^n = \overline{z}$.

Exercice 31 ●●○○ Banque d'exercices CCINP 2024 (84)

1. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
3. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

Exercice 32 ●●○○ Banque d'exercices CCINP 2024 (89)

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 2$. On pose $z = \mathrm{e}^{2i\pi/n}$.

1. On suppose que $k \in [\![1\,, n-1]\!]$. Déterminer alors le module et un argument du complexe $z^k - 1$.
2. On pose $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left|z^k - 1\right|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

Exercice 33 ●●○○ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier :

1. $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$. **2.** $\displaystyle\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$. **3.** $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} (1+\omega)^n$. **4.** $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} |\omega - 1|$.

Exercice 34 ●●○○ On pose $j = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

1. Calculer $(1+j)^n$ et $\left(1+j^2\right)^n$ suivant les valeurs de n.
2. Pour z complexe quelconque, comparer
$$(z+1)(z+j)\left(z+j^2\right) \quad \text{et} \quad (1+z)(1+jz)\left(1+j^2z\right).$$
3. a, b et c désignent des complexes quelconques.

   a. Calculer $(a+b)\left(aj+bj^2\right)\left(aj^2+bj\right)$.

   b. En déduire une factorisation de $\left(a+bj+cj^2\right) + \left(a+bj^2+cj\right)^3$.
4. a, b et c désignant des complexes quelconques, on pose $x = a+b+c$, $y = a+bj+cj^2$ et $z = a+bj^2+cj$. Calculer $x^3 + y^3 + z^3$.

Exercice 35 ●●●○

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} j^k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(j^2\right)^k$, où $j = \exp \dfrac{2i\pi}{3}$.
2. En déduire une expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3k}$.

Application à la géométrie

Exercice 36 ○○○○ Dans chacun des cas suivants, représenter l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité proposée :

1. $|z| = 3$. **2.** $\mathrm{Re}(z) = -2$. **3.** $\mathrm{Im}(z) = 1$.

Exercice 37 ●○○○ On note A, B et C les trois points d'affixes respectives $a = 1 + i$, $b = -i$ et $c = -1 + 2i$. Que peut-on dire du triangle ABC ?

Exercice 38 ●○○○ À quelle condition nécessaire et suffisante sur z :

1. z et z^2 sont-ils les affixes de deux vecteurs :
   a. colinéaires ? **b.** orthogonaux ?
2. 1, z et z^2 sont-ils les affixes de trois points alignés ?
3. z et $\overline{z}$ sont-ils les affixes de deux vecteurs orthogonaux ?
4. z, $\dfrac{1}{z}$ et $z - 1$ sont-ils les affixes de points situés sur un même cercle de centre O ?
5. z, z^2 et z^3 sont-ils les affixes des sommets d'un triangle rectangle en z ?
6. z et ses deux racines carrées forment-ils un triangle rectangle en z ?

Exercice 39 ●○○○ On note A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe 5. Déterminer le lieu des points M pour lesquels :

1. $MA = MB$. **2.** $MB = MA\sqrt{2}$.

Exercice 40 ●○○○

1. Caractériser géométriquement la similitude $z \longmapsto 2(1 + i)z - 7 - 4i$.
2. Déterminer l'expression complexe de la rotation de centre $1 + i$ et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{4}$.
3. On note r la rotation de centre 1 et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$ et s la symétrie centrale de centre $3 + i$. Caractériser géométriquement $s \circ r$.
4. On note r la rotation de centre $2 + i$ et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$ et r' la rotation de centre $3 - 2i$ et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{3}$. Caractériser géométriquement $r' \circ r$.

Exercice 41 ●○○○ On considère l'application f qui à un point M d'affixe z associe le point M' d'affixe e^z. Déterminer l'image des droites d'équations $x = a$ et $y = b$ par f.

Exercice 42 ●○○○ Dans le plan complexe, démontrer que les points d'affixes a, b et c sont alignés si et seulement si

$$a\overline{b} + b\overline{c} + c\overline{a} = b\overline{a} + c\overline{b} + a\overline{c}.$$

Exercice 43 ●○○○ Soit a, b, c et d quatre nombres complexes vérifiant

$$a + c = b + d \quad \text{et} \quad a + ib = c + id.$$

Quelle figure forme leur image dans le plan ?

Exercice 44 ●●○○ Vérifier qu'une condition nécessaire et suffisante pour que les points d'affixes a, b et c dans le plan complexe soient les sommets d'un triangle équilatéral est :

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0.$$

Exercice 45 ●●○○ Interpréter géométriquement la relation

$$\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{iy} + \mathrm{e}^{iz} = 0,$$

où x, y et z sont des réels.

Exercice 46 ●●●○ Donner une condition nécessaire et suffisante sur les nombres complexes a, b et c pour que les racines de $X^4 + aX^2 + bX + c$ forment dans le plan complexe :

1. un parallélogramme. **2.** un rectangle.

Indications

Exercice 35. **2.** Exprimer les sommes de la question **1** en fonction de

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/3\rfloor}\binom{n}{3k},\quad \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/3\rfloor}\binom{n}{3k+1}\quad\text{et}\quad \sum_{k=0}^{\lfloor (n-2)/3\rfloor}\binom{n}{3k+2}.$$

Éléments de réponses

Exercice 1. Le résultat dépend du reste de l'exposant dans la division euclidienne par 4.
1. $-i$. **2.** 1. **3.** i. **4.** -1. **5.** 1. **6.** $-i$. **7.** i.

Exercice 2. $z_1=4$. $z_2=7-3i$. $z_3=-20-28i$. $z_4=21+20i$. $z_5=19-16i$. $z_6=29$. $z_7=1-i$. $z_8=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$. $z_9=-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$.

Exercice 3. **1.** $3+4i$. **2.** $-\frac{1}{2}-\frac{7}{2}i$. **3.** $-i$.

Exercice 4. **1.** $1-i$. **2.** $-3-2i$. **3.** $-2-i$. **4.** i. **5.** $\frac{4}{5}-\frac{2}{5}i$. **6.** 2.

Exercice 5. **1.** $\sqrt{5}$. **2.** 5. **3.** $\sqrt{65}$. **4.** $\sqrt{5}$. **5.** $\frac{2}{3}$. **6.** $\sqrt{3}$.

Exercice 6. $z=\frac{8}{5}+\frac{9}{5}i$, $\overline{z}=\frac{8}{5}-\frac{9}{5}i$, et $|z|=\sqrt{\frac{29}{5}}$.

Exercice 7. **1.** $(z,t)=\left(\frac{6-9i}{13},\frac{-16+11i}{13}\right)$. **2.** $(z,t)=(i,1)$.

Exercice 9. **1.** $i\mathbb{R}\backslash\{3i\}$. **2.** $z\in\mathbb{U}$. **3.** $f^{-1}(z)=\frac{3iz-i}{z-3}$.

Exercice 11. Si $m=m'^2+m''^2$ et $n=n'^2+n''^2$, alors $mn=\left(m'n'-m''n''\right)^2+\left(m'n''+m''n'\right)^2$.

Exercice 12. **1.a.** $\{0\}$. **1.b.** $\left\{\frac{1}{5}(2+i)\right\}$. **1.c.** $\left\{-\frac{1}{2}(3+i)\right\}$. **1.d.** $\{3+3i\}$.
2. $\{i,-3i,1-4i\}$. **3.a.** $\left\{\frac{3\pm i\sqrt{7}}{2}\right\}$. **3.b.** $\{2\}$. **3.c.** $\{2i,-4+i\}$. **3.c.** $\{\pm i\sqrt{3}\}$.
3.d. $\left\{\frac{-3\pm i\sqrt{15}}{6}\right\}$. **3.f.** $\left\{\frac{i-9}{3},\frac{4i-1}{2}\right\}$. **4.a.** $\{\pm i,\pm i\sqrt{2}\}$. **4.b.** $\{\pm 6,\pm 2i\}$.
5.a. $\{(-1,4i)\}$. **5.b.** $\{(1+2i,1-2i),(1-2i,1+2i)\}$.
5.c. $\{(-2+i,-1+2i),(-1+2i,-2+i)\}$.
6.a. $\left\{\frac{-1-i}{2}\right\}$. **6.b.** $\left\{-1-2i,\frac{1-i}{2}\right\}$. **6.c.** $\{-i\}$.

Exercice 13. $p=-(1+2i+3-5i)=-4+3i$ et $q=(1+2i)(3-5i)=13+i$.

Exercice 14. $\lambda<\frac{7}{4}$.

Exercice 15. **1.a.** $\left(\sqrt{2}-1\right)e^{i\pi}$. **1.b.** $5\,e^{-i\frac{\pi}{2}}$. **1.c.** $\sqrt{5}\,e^{-i\operatorname{Arctan}(1/2)}$. **1.d.** $\left(2\sqrt{3}\right)^{19}e^{-i\frac{\pi}{6}}$.
1.e. $\frac{1}{\sqrt{5}}e^{i(\pi+\operatorname{Arctan}(2/11))}$. **2.** $-2^{999}-2^{999}\sqrt{3}i$. **3.** $\begin{cases}2\cos\frac{\theta}{2}\,e^{i\frac{\theta}{2}} & \text{si } 0\leqslant\theta<\pi\\ -2\cos\frac{\theta}{2}\,e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)} & \text{si } \pi<\theta\leqslant 2\pi\\ \text{impossible} & \text{si } \theta=\pi.\end{cases}$

Exercice 16. **1.** $n\in 4\mathbb{Z}$. **2.** $n\in 3+6\mathbb{Z}$.

Exercice 17. $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right)=\frac{1}{2}$.

Exercice 18. $1+e^{i\theta}+e^{2i\theta}=e^{i\theta}\left(1+e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)=(1+2\cos\theta)\,e^{i\theta}$, il reste alors à gérer le signe de $1+2\cos\theta$.

Exercice 19. Passer au carré des modules et utiliser $z\overline{z}=1$, pour $z\in\mathbb{U}$.

Exercice 20. La réciproque est $z\longmapsto\frac{z-\omega}{1-\overline{\omega}z}$.

Exercice 21. **1.a.** $\frac{1}{4}\sin(5x)-\frac{1}{4}\sin(3x)+\frac{1}{2}\sin(x)$.
1.b. $-\frac{1}{8}\sin(9x)+\frac{3}{8}\sin(5x)-\frac{1}{8}\sin(3x)-\frac{3}{8}\sin(x)$. **2.a.** $\frac{5}{12}$. **2.b.** $\frac{\pi}{32}$.

Exercice 22. **1.** $\pm\sqrt{2}\,e^{i\pi/12}=\pm\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}\pm i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}$. **2.** $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

Exercice 23. **1.** $\cos(5x)=16\cos^5x-20\cos^3x+5\cos x$.
2.a. $\frac{5+\sqrt{5}}{8}$. **2.b.** $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$. **2.c.** $\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

Exercice 24. **1.a.** L'équation équivaut à $\frac{z^5-1}{z-1}=0$ et l'ensemble des solutions est $\left\{e^{\pm\frac{2i\pi}{5}},e^{\pm\frac{4i\pi}{5}}\right\}$. **1.b.** x est solution de $X^2+X-1=0$, dont les solutions sont $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.
2. $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Exercice 25. $\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2p+1}\left(X^2-1\right)^pX^{n-2p}$.

Exercice 26. **1.** $\begin{cases}0 & \text{si } x\in 2\pi\mathbb{Z}\\ \sin\left(\frac{nx}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} & \text{sinon.}\end{cases}$
2. $\begin{cases}(n+1)\cos y & \text{si } x\in 2\pi\mathbb{Z}\\ \cos\left(\frac{n}{2}x+y\right)\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}} & \text{sinon.}\end{cases}$ **3.** $2^n\left(\cos\frac{x}{2}\right)^n\cos\frac{nx}{2}$.

Exercice 27. **1.** $\frac{\ln 2}{2}+i\frac{\pi}{4}+2i\pi\mathbb{Z}$. **2.** $\ln 13+i\pi+i\operatorname{Arctan}\frac{12}{5}+2i\pi\mathbb{Z}$. **3.** $\pm i\frac{\pi}{3}+2i\pi\mathbb{Z}$.

Exercice 28. **1.a.** $\pm(2-i)$. **1.b.** $\pm(1+4i)$. **1.c.** $\pm(4-3i)$. **1.d.** $\pm(5+4i)$.
2. $\pm(3+2i)$ et $\pm(2-3i)$.

Exercice 29. **1.** $\{\pm 1,\pm i,\pm\sqrt[4]{2},\pm i\sqrt[4]{2}\}$. **2.** $\left\{\exp\left(i\frac{2k\pi\pm\varphi}{3}\right)\ \middle|\ k\in[\![0\,,2]\!]\right\}$.

Exercice 30. **1.** $\left\{\sqrt[3]{3}\exp\left(\frac{i\pi(1+4k)}{6}\right)-2\ \middle|\ k\in[\![0\,,2]\!]\right\}$.
2. $\left\{2^{5/8}\exp\left(\frac{i\pi(8k+1)}{16}\right)+1\ \middle|\ k\in[\![0\,,3]\!]\right\}$. **3.** $\left\{\exp\left(\frac{i\pi(2k+1)}{n}\right)\ \middle|\ k\in[\![0\,,n-1]\!]\right\}$. **4.** $\{0\}\cup\left\{\exp\left(\frac{2ik\pi}{n+1}\right)\ \middle|\ k\in[\![0\,,n]\!]\right\}$.

Exercice 33. **1.** $\begin{cases} 1 & \text{si } n=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ **2.** $(-1)^{n-1}$. **3.** $2n$. **4.** $2\dfrac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}$.

Exercice 35. **1.** 2^n, $(1+j)^n$ et $\left(1+j^2\right)^n$. **2.** $\dfrac{2^n+2\cos\frac{n\pi}{3}}{3}$.

Exercice 36. **1.** Cercle de centre O et de rayon 3. **2.** Droite d'équation $x=-2$.
3. Droite d'équation $y=1$.

Exercice 37. Triangle isocèle et rectangle en A.

Exercice 38. **1.a.** $z\in\mathbb{R}$. **1.b.** $z\in i\mathbb{R}$. **2.** $z\in\mathbb{R}$. **3.** $z=r\,\mathrm{e}^{\pm i\pi/4}$ avec $r\in\mathbb{R}^*$. **4.** $\mathrm{e}^{\pm i\pi/3}$.
5. $z=0$ ou $z=1$ ou $\mathrm{Re}(z)=-1$. **6.** $z\in\mathbb{U}\cup\{0\}$.

Exercice 39. **1.** Droite d'équation $x=3$. **2.** Cercle de centre $(-3,0)$ et de rayon $4\sqrt{2}$.

Exercice 40. **1.** Similitude de centre $3-2i$, de rapport $2\sqrt{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

2. $z\longmapsto\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}z+1+i\big(1-\sqrt{2}\big)$.

3. $s\circ r : z\longmapsto -iz+5-3i$ est la rotation de centre $1-4i$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

4. $r'\circ r : z\longmapsto z+\dfrac{1+3\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}-3}{2}i$ est la translation de vecteur $\dfrac{1+3\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}-3}{2}i$.

Exercice 41. Cercle de centre O et de rayon e^a. Demi-droite d'origine O et formant un angle b avec l'axe des abscisses.

Exercice 43. $ABCD$ est un losange.

Exercice 45. Sommets d'un triangle équilateral inscrit dans le cercle unité.