

5 Fonctions usuelles

Cahier de calcul : fiches 9 à 11.

Banque CCINP : $\emptyset$.

Logarithme, exponentielle et puissances

— **Exercice 1** ●○○ — Étudier chacune des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto e^{1/\ln x}$.
2. $x \mapsto \ln(e^x + e^{-x})$.
3. $x \mapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.
4. $x \mapsto \frac{x^3}{x^2 - 3}$.
5. $x \mapsto \ln \frac{1+x}{1-x}$.
6. $x \mapsto \sqrt{\frac{\ln|x|}{x}}$.
7. $x \mapsto \sqrt[4]{x^2 - 2x - 3}$.
8. $x \mapsto \frac{x}{4} + \frac{1}{3}\sqrt{|x^2 - 16|}$.
9. $x \mapsto x^{x^3}$.

— **Exercice 2** ●○○ — Où l'on démontre que $-1 = 1...$
Commenter la « démonstration » suivante.

$$-1 = (-1)^1 = (-1)^{\frac{2}{2}} = ((-1)^2)^{\frac{1}{2}} = (1)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

— **Exercice 3** ●○○ — ☑ Déterminer les limites suivantes.

1. $(x^x)^x$ en 0^+ .
2. x^{x^x} en 0^+ .
3. $\frac{(x^x)^x}{x^{x^x}}$ en $+\infty$.
4. $\frac{x-1}{x}e^{1/x}$ en 0^- .
5. $\frac{a^{b^x}}{b^{a^x}}$ en $+\infty$, où $1 < a < b$.
6. $\frac{a^{a^x}}{x^{x^a}}$ en $+\infty$, où $a > 1$.

— **Exercice 4** ●○○ — ☑ Résoudre les (in)équations suivantes.

1. $2e^x - 35e^{-x} = 9$.
2. $2(\ln x)^2 = 12 + 5 \ln x$.
3. $x^x = \frac{3}{4}\sqrt{6}$.
4. $(x^x)^x = x^{x^x}$.
5. $\ln|x+1| - \ln|2x+1| \leq \ln 2$.
6. $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.
7. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.
8. $\ln(-x-3) + \ln(x+4) \geq \ln(x-5)$.
9. $\ln(-x-3) \geq \ln\left(\frac{x-5}{x+4}\right)$.

— **Exercice 5** ●○○ — ☑ Résoudre le système $\begin{cases} 2\frac{\ln y}{\ln x} + 2\frac{\ln x}{\ln y} = -5 \\ xy = e. \end{cases}$

— **Exercice 6** ●○○ — ☑ Comparer les réels e^π et π^e .

— **Exercice 7** ●○○ — ☑ Exponentielle de base a

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Étudier la fonction $x \mapsto a^x$ sur $\mathbb{R}$.
2. Résoudre l'équation $2^x + 3^x = 5$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

— **Exercice 8** ●○○ —

1. Soit I un intervalle, $u \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ strictement positive et $v \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$. Montrer que u^v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. On note f la fonction $x \mapsto x^x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
 - a. Étudier la fonction f .
 - b. Déterminer une équation de la tangente de f en 1, ainsi que la position relative du graphe de f par rapport à cette tangente.

— **Exercice 9** ●○○ — ☑ Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, $e^x \geq \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$.

— **Exercice 10** ●○○ — Soit $\alpha \in [0, 1]$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$.
2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{\alpha}{k}\right) \geq (n+1)^\alpha$.

— **Exercice 11** ●○○ — ☑

1. Étudier la monotonie de $t \mapsto \frac{(1+t)\ln(1+t)}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. En déduire, pour tous $0 < a \leq b$, la monotonie de $x \mapsto \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. En déduire que, pour tous $a, b > 0$, $\ln\left(1 + \frac{a}{b}\right) \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right) \leq \ln^2(2)$.

Fonctions trigonométriques

— Exercice 12 ●○○○ — ✓

1. En considérant $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, déterminer les valeurs de $\cos \frac{\pi}{12}$, $\sin \frac{\pi}{12}$ et $\tan \frac{\pi}{12}$.
2. Calculer $\tan \frac{\pi}{8}$, $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$.

— Exercice 13 ●○○○ — ✓

Résoudre graphiquement les inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$,

1. $\cos x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$.
2. $\sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
3. $|\tan x| \leq 1$.

— Exercice 14 ●●○○ — ?

Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$|\sin(nx)| \leq n|\sin x|.$$

— Exercice 15 ●●○○ — ? ✓

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$,

1. $\sin x + \sin(2x) = 0$.
2. $\tan(2x) = 3 \tan x$.
3. $2 \sin x + \sin(3x) = 0$.
4. $3 \tan x = 2 \cos x$.
5. $\cos x = 1 + \sqrt{3} \sin x$.

— Exercice 16 ●●○○ — ✓

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction

$$x \mapsto \ln\left(\tan \frac{x\pi}{2}\right).$$

— Exercice 17 ●●○○ — ? ✓

Étudier chacune des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \frac{\tan(2x)}{\tan x}$.
2. $x \mapsto \sin(3x) + 3 \sin x$.

— Exercice 18 ●●○○ — ✓

Simplifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \sin \frac{\pi}{2^k} \sin \frac{3\pi}{2^k}$.

— Exercice 19 ●○○○ —

1. Montrer que, pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan x > x$.
2. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{x}{\sin x}$ est bijective de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur son image que l'on précisera.

— Exercice 20 ●●○○ — ? ✓

1. Étudier la fonction $x \mapsto \cos^3 x + \sin^3 x$.
2. Résoudre l'équation $\cos^3 x + \sin^3 x = 1$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

— Exercice 21 ●●○○ — ?

1. Étudier les variations de la fonction $x \mapsto 2^{-x}x$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire les variations de $x \mapsto 2^{\sin x} + 2^{\cos x}$ sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.
3. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $3 \leq 2^{|\sin x|} + 2^{|\cos x|} \leq 2^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

— Exercice 22 ●○○○ — ✓

Simplifier $\operatorname{Arctan}\left(\tan\left(-\frac{11\pi}{4}\right)\right)$.

— Exercice 23 ●○○○ — ✓

Tracer le graphe de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arctan}(\tan x)$.

— Exercice 24 ●●○○ —

Étudier chacune des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto x \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}$.
2. $x \mapsto x \operatorname{Arctan} \frac{1}{x-1}$.

— Exercice 25 ●○○○ — ✓

Simplifier $\cos(\operatorname{Arctan} x)$ et $\sin(\operatorname{Arctan} x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

— Exercice 26 ●●○○ — ✓

Résoudre les équations suivantes, dans un domaine à préciser.

1. $\operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arccos} \frac{4}{5}$.
2. $\operatorname{Arcsin}(2x) = \operatorname{Arccos} x$.
3. $\operatorname{Arcsin}(\tan x) = x$.
4. $\operatorname{Arctan}(2x) + \operatorname{Arctan}(3x) = \frac{\pi}{4}$.

— **Exercice 27** ●●○○ —   Simplifier les expressions suivantes.

1. $\operatorname{Arccos}(-x) + \operatorname{Arccos} x.$
2. $\operatorname{Arctan} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$
3. $\operatorname{Arctan} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$
4. $\operatorname{Arccos}(\operatorname{th} x) + 2 \operatorname{Arctan}(e^x)$
5. $\operatorname{Arctan}(\sqrt{x^2+1} - x).$
6. $\operatorname{Arctan}(e^x) - \operatorname{Arctan}\left(\operatorname{th} \frac{x}{2}\right).$

— **Exercice 28** ●●○○ —  

1. Simplifier, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan} k.$
2. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \operatorname{Arctan} \frac{1}{k^2 + k + 1}.$

— **Exercice 29** ●●○○ —  La suite de Fibonacci $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_n + F_{n+1}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = (-1)^n$ (*identité de Cassini*).
2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{Arctan} \frac{1}{F_{2n}} = \operatorname{Arctan} \frac{1}{F_{2n+1}} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{F_{2n+2}}.$
3. En déduire l'existence et la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \operatorname{Arctan} \frac{1}{F_{2k+1}}.$

— **Exercice 30** ●●○○ —  **Formule de Machin**

1. Montrer que $\frac{\pi}{4} = \operatorname{Arctan} \frac{1}{2} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{3}.$
2. Calculer $\operatorname{Arctan} \frac{1}{2} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{5} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{8}.$
3. a. Exprimer $\tan(4x)$ en fonction de $\tan x$, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right[+ \frac{\pi}{4} \mathbb{Z}.$
b. En déduire la *formule de Machin* $\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{Arctan} \frac{1}{5} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{239}.$

La *formule de Machin*, découverte par John Machin en 1706, a longtemps servi à calculer les premières décimales de π , dans la mesure où l'on sait calculer assez facilement les arcs tangentes. Selon cette terminologie, la formule de la question 1 est appelée une *formule de type Machin* et il en existe beaucoup d'autres, e.g. $\frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{Arctan} \frac{1}{3} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{7}.$

Fonctions hyperboliques

— **Exercice 31** ●○○○ — Montrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

1. $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y.$
2. $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y.$
3. $\operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y}.$

— **Exercice 32** ●○○○ —

Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch} x}$ possède un unique point fixe.

— **Exercice 33** ●●○○ — 

Factoriser la somme $\sum_{k=0}^n \operatorname{ch}(2kx)$, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}.$

— **Exercice 34** ●●○○ — 

1. Que vaut $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{th} x}{x} ?$
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{th}(2x) = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}.$
3. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \operatorname{th}^2 \left(\frac{x}{2^k}\right)\right) = \frac{x}{\operatorname{th} x}.$$

— **Exercice 35** ●●○○ — Montrer que si $x = \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2}\right)\right)$, alors

$$\operatorname{th} \frac{x}{2} = \tan \frac{y}{2}, \quad \operatorname{th} x = \sin y \quad \text{et} \quad \operatorname{ch} x = \frac{1}{\cos y}.$$

— **Exercice 36** ●●○○ —  Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\operatorname{th} x| \geq \frac{|x|}{1 + |x|}.$

Indications

Exercice 6. On pourra étudier la fonction $x \mapsto x/\ln(x)$.

Exercice 9. Procéder par récurrence.

Exercice 14. Procéder par récurrence.

Exercice 15. 1. Imparité ou duplication du sinus. 2. Duplication de la tangente.

3. Triplcation du sinus. 4. Se ramener à des sinus.

5. Se ramener à un cosinus en divisant par 2.

Exercice 17. 1. $f(x) = 1 + \frac{1}{\cos(2x)}$.

Exercice 20. 1. $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Exercice 21. 2. Posons $f : x \mapsto 2^{\sin x} + 2^{\cos x}$ et $g : x \mapsto 2^{-x}x$.

Alors $f'(x) = \ln 2 \times 2^{\sin x + \cos x} (g(\cos x) - g(\sin x))$.

Exercice 27. Il faut dériver...

Exercice 28. 1. Calculer la tangente.

Exercice 36. On pourra exploiter la parité et réécrire th en lien avec l'exponentielle.

Éléments de réponses

Exercice 3. 1. 1. 2. 0. 3. 0. 4. 0. 5. $+\infty$. 6. $+\infty$.

Exercice 4. 1. $\{\ln 7\}$. 2. $\{e^{-3/2}, e^4\}$. 3. $\left\{\frac{3}{2}\right\}$. 4. $\{1; 2\}$.

5. $]-\infty, -1[\cup]-1, -\frac{3}{5}] \cup [-\frac{1}{3}, +\infty[$. 6. $\mathbb{R}_+$. 7. $\{1; 4\}$. 8. $\emptyset$. 9. $]-\infty, -7]$.

Exercice 5. $\{(e^{-1}, e^2), (e^2, e^{-1})\}$.

Exercice 6. $e^\pi > \pi^e$.

Exercice 7. 2. $\{1\}$.

Exercice 11. 1. Strictement croissante. 2. Strictement décroissante.

Exercice 12. 1. $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ et $\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$.

2. $\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$, $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$.

Exercice 13. 1. $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] + 2\pi\mathbb{Z}$. 2. $]-\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}[+ 2\pi\mathbb{Z}$. 3. $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] + \pi\mathbb{Z}$.

Exercice 15. 1. $\pi\mathbb{Z} \cup \frac{2\pi}{3}\mathbb{Z}$. 2. $\left\{0, \pm \frac{\pi}{6}\right\} + \pi\mathbb{Z}$. 3. $\pi\mathbb{Z}$. 4. $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\} + 2\pi\mathbb{Z}$.

5. $\left\{0, -\frac{2\pi}{3}\right\} + 2\pi\mathbb{Z}$.

Exercice 16. $]0, 1[+ 2\mathbb{Z}$.

Exercice 17. 1. f est définie sur $]0, \frac{\pi}{4}[+ \frac{\pi}{4}\mathbb{Z}$, π -périodique et impaire, $f'(x) = \frac{2\sin(2x)}{\cos^2(2x)}$ et

$\lim_{x \rightarrow 0} f = 2$, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} f = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} f = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f = 0$.

2. f est définie sur $\mathbb{R}$, 2π -périodique et paire,

$f'(x) = 3(\cos(3x) + \cos x) = 12 \cos x \left(\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Exercice 18. Par télescopage

$$\sum_{k=1}^n \sin \frac{\pi}{2^k} \sin \frac{3\pi}{2^k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \cos \frac{\pi}{2^{k-1}} - \cos \frac{\pi}{2^{k-2}} = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{2^{n-1}} - 1 \right).$$

Exercice 20. 2. $\left\{0, \frac{\pi}{2}\right\} + 2\pi\mathbb{Z}$.

Exercice 22. $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 23. $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}(\tan x)$ est π -périodique et $f(x) = x$, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 25. $\cos(\operatorname{Arctan} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ et $\sin(\operatorname{Arctan} x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

Exercice 26. 1. $\frac{3}{5}$. 2. $\frac{1}{\sqrt{5}}$. 3. 0. 4. $\frac{1}{6}$.

Exercice 27. 1. π . 2. $\frac{\operatorname{Arccos} x}{2}$. 3. $\operatorname{Arcsin} x$. 4. π . 5. $\frac{\pi}{4} - \frac{\operatorname{Arctan} x}{2}$. 6. $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 28. 1. $\operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan} k = \operatorname{Arctan} \frac{1}{k^2 + k + 1}$. 2. $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 29. 3. $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 30. 2. $\operatorname{Arctan} \frac{1}{2} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{5} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 33. $\operatorname{ch}(nx) \frac{\operatorname{sh}((n+1)x)}{\operatorname{sh} x}$.

Exercice 34. 1. 1.