5 Fonctions usuelles

Cahier de calcul : fiches 9 à 11. **Banque CCINP :** $\varnothing$.

Logarithme, exponentielle et puissances

Exercice 1 ●●○○

Étudier chacune des fonctions suivantes.

1. $x \longmapsto e^{1/\ln x}$.
2. $x \longmapsto \ln(e^x + e^{-x})$.
3. $x \longmapsto \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$.
4. $x \longmapsto \dfrac{x^3}{x^2 - 3}$.
5. $x \longmapsto \ln \dfrac{1+x}{1-x}$.
6. $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{\ln|x|}{x}}$.
7. $x \longmapsto \sqrt[4]{x^2 - 2x - 3}$.
8. $x \longmapsto \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{3}\sqrt{|x^2 - 16|}$.
9. $x \longmapsto x^{x^3}$.

Exercice 2 ●○○○ — Où l'on démontre que $-1 = 1$...

Commenter la « démonstration » suivante.

$$-1 = (-1)^1 = (-1)^{\frac{2}{2}} = \left((-1)^2\right)^{\frac{1}{2}} = (1)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

Exercice 3 ●●○○ — ☑

Déterminer les limites suivantes.

1. $(x^x)^x$ en 0^+.
2. x^{x^x} en 0^+.
3. $\dfrac{(x^x)^x}{x^{x^x}}$ en $+\infty$.
4. $\dfrac{x-1}{x} e^{1/x}$ en 0^-.
5. $\dfrac{a^{b^x}}{b^{a^x}}$ en $+\infty$, où $1 < a < b$.
6. $\dfrac{a^{a^x}}{x^{x^a}}$ en $+\infty$, où $a > 1$.

Exercice 4 ●●○○ — ☑

Résoudre les (in)équations suivantes.

1. $2\,\mathrm{e}^x - 35\,\mathrm{e}^{-x} = 9$.
2. $2(\ln x)^2 = 12 + 5\ln x$.
3. $x^x = \dfrac{3}{4}\sqrt{6}$.
4. $(x^x)^x = x^{x^x}$.
5. $\ln|x+1| - \ln|2x+1| \leqslant \ln 2$.
6. $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.
7. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.
8. $\ln(-x-3) + \ln(x+4) \geqslant \ln(x-5)$.
9. $\ln(-x-3) \geqslant \ln\left(\dfrac{x-5}{x+4}\right)$.

Exercice 5 ●○○○ — ☑

Résoudre le système $\begin{cases} 2\dfrac{\ln y}{\ln x} + 2\dfrac{\ln x}{\ln y} = -5 \\ xy = \mathrm{e}. \end{cases}$

Exercice 6 ●●○○ — ☑

Comparer les réels e^π et π^e.

Exercice 7 ●○○○ — ☑

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Étudier la fonction $x \longmapsto a^x$ sur $\mathbb{R}$.
2. Résoudre l'équation $2^x + 3^x = 5$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 8 ●○○○

1. Soit I un intervalle, $u \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$ strictement positive et $v \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$. Montrer que u^v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. On note f la fonction $x \longmapsto x^x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - **a.** Étudier la fonction f.
   - **b.** Déterminer une équation de la tangente de f en 1, ainsi que la position relative du graphe de f par rapport à cette tangente.

Exercice 9 ●●○○

💡 Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, $\quad \mathrm{e}^x \geqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

Exercice 10 ●●○○

Soit $\alpha \in [0\,, 1]$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\quad (1+x)^\alpha \leqslant 1 + \alpha x$.
2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\alpha}{k}\right) \geqslant (n+1)^\alpha$.

Exercice 11 ●●○○ — ☑

1. Étudier la monotonie de $t \longmapsto \dfrac{(1+t)\ln(1+t)}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. En déduire, pour tous $0 < a \leqslant b$, la monotonie de $x \longmapsto \dfrac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. En déduire que, pour tous $a, b > 0$, $\quad \ln\left(1 + \dfrac{a}{b}\right) \ln\left(1 + \dfrac{b}{a}\right) \leqslant \ln^2(2)$.

Fonctions trigonométriques

Exercice 12 ●○○○

1. En considérant $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$, déterminer les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\tan\frac{\pi}{12}$.
2. Calculer $\tan\frac{\pi}{8}$, $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

Exercice 13 ●○○○

Résoudre graphiquement les inéquations suivantes, d'inconnue $x\in\mathbb{R}$,

1. $\cos x \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$.
2. $\sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
3. $|\tan x| \leqslant 1$.

Exercice 14 ●●○○

Montrer que, pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$,

$$|\sin(nx)| \leqslant n|\sin x|.$$

Exercice 15 ●●○○

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x\in\mathbb{R}$,

1. $\sin x+\sin(2x)=0$.
2. $\tan(2x)=3\tan x$.
3. $2\sin x+\sin(3x)=0$.
4. $3\tan x = 2\cos x$.
5. $\cos x = 1+\sqrt{3}\sin x$.

Exercice 16 ●●○○

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction

$$x\longmapsto \ln\left(\tan\frac{x\pi}{2}\right).$$

Exercice 17 ●●●○

Étudier chacune des fonctions suivantes :

1. $x\longmapsto \frac{\tan(2x)}{\tan x}$.
2. $x\longmapsto \sin(3x)+3\sin x$.

Exercice 18 ●●○○

Simplifier, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi}{2^k}\sin\frac{3\pi}{2^k}$.

Exercice 19 ●○○○

1. Montrer que, pour tout $x\in\left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[$, $\quad\tan x > x$.
2. Montrer que la fonction $x\longmapsto\frac{x}{\sin x}$ est bijective de $\left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ sur son image que l'on précisera.

Exercice 20 ●●○○

1. Étudier la fonction $x\longmapsto\cos^3 x+\sin^3 x$.
2. Résoudre l'équation $\cos^3 x+\sin^3 x=1$, d'inconnue $x\in\mathbb{R}$.

Exercice 21 ●●●○

1. Étudier les variations de la fonction $x\longmapsto 2^{-x}x$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire les variations de $x\longmapsto 2^{\sin x}+2^{\cos x}$ sur $\left[0\,,\frac{\pi}{4}\right]$.
3. En déduire que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\quad 3\leqslant 2^{|\sin x|}+2^{|\cos x|}\leqslant 2^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

Exercice 22 ●○○○

Simplifier $\quad\operatorname{Arctan}\left(\tan\left(-\frac{11\pi}{4}\right)\right)$.

Exercice 23 ●○○○

Tracer le graphe de la fonction $\quad x\longmapsto\operatorname{Arctan}(\tan x)$.

Exercice 24 ●●○○

Étudier chacune des fonctions suivantes.

1. $x\longmapsto x\operatorname{Arctan}\frac{1}{x}$.
2. $x\longmapsto x\operatorname{Arctan}\frac{1}{x-1}$.

Exercice 25 ●○○○

Simplifier $\cos(\operatorname{Arctan} x)$ et $\sin(\operatorname{Arctan} x)$, pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Exercice 26 ●●○○

Résoudre les équations suivantes, dans un domaine à préciser.

1. $\operatorname{Arcsin} x=\operatorname{Arccos}\frac{4}{5}$.
2. $\operatorname{Arcsin}(2x)=\operatorname{Arccos} x$.
3. $\operatorname{Arcsin}(\tan x)=x$.
4. $\operatorname{Arctan}(2x)+\operatorname{Arctan}(3x)=\frac{\pi}{4}$.

Exercice 27 ●●○○ Simplifier les expressions suivantes.

1. $\operatorname{Arccos}(-x) + \operatorname{Arccos} x$. **2.** $\operatorname{Arctan} \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

3. $\operatorname{Arctan} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. **4.** $\operatorname{Arccos}(\operatorname{th} x) + 2\operatorname{Arctan}(\mathrm{e}^x)$

5. $\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$. **6.** $\operatorname{Arctan}(\mathrm{e}^x) - \operatorname{Arctan}\left(\operatorname{th} \dfrac{x}{2}\right)$.

Exercice 28 ●●●○

1. Simplifier, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan} k$.

2. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Arctan} \frac{1}{k^2+k+1}$.

Exercice 29 ●●●○ La *suite de Fibonacci* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_n + F_{n+1}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = (-1)^n$ *(identité de Cassini).*

2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{Arctan} \dfrac{1}{F_{2n}} = \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{F_{2n+1}} + \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{F_{2n+2}}$.

3. En déduire l'existence et la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Arctan} \frac{1}{F_{2k+1}}$.

Exercice 30 ●●●○ **Formule de Machin**

1. Montrer que $\dfrac{\pi}{4} = \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{2} + \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{3}$.

2. Calculer $\operatorname{Arctan} \dfrac{1}{2} + \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{5} + \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{8}$.

3. **a.** Exprimer $\tan(4x)$ en fonction de $\tan x$, pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{8}, \dfrac{\pi}{8}\right[+ \dfrac{\pi}{4}\mathbb{Z}$.

b. En déduire la *formule de Machin* $\dfrac{\pi}{4} = 4\operatorname{Arctan} \dfrac{1}{5} - \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{239}$.

La *formule de Machin*, découverte par John Machin en 1706, a longtemps servi à calculer les premières décimales de π, dans la mesure où l'on sait calculer assez facilement les arc tangentes. Selon cette terminologie, la formule de la question **1** est appelé une *formule de type Machin* et il en existe beaucoup d'autres, *e.g.* $\dfrac{\pi}{4} = 2\operatorname{Arctan} \dfrac{1}{3} + \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{7}$.

Fonctions hyperboliques

Exercice 31 ●○○○ Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

1. $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$. **2.** $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$.

3. $\operatorname{th}(x+y) = \dfrac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y}$.

Exercice 32 ●○○○

Montrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$ possède un unique point fixe.

Exercice 33 ●●○○

Factoriser la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(2kx)$, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 34 ●●●○

1. Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{th} x}{x}$?

2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{th}(2x) = \dfrac{2\operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}$.

3. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) = \frac{x}{\operatorname{th} x}.$$

Exercice 35 ●●○○ Montrer que si $x = \ln\left(\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{y}{2}\right)\right)$, alors

$$\operatorname{th} \frac{x}{2} = \tan \frac{y}{2}, \qquad \operatorname{th} x = \sin y \qquad \text{et} \qquad \operatorname{ch} x = \frac{1}{\cos y}.$$

Exercice 36 ●●○○ Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\operatorname{th} x| \geqslant \dfrac{|x|}{1+|x|}$.

Indications

Exercice 9. Procéder par récurrence.

Exercice 14. Procéder par récurrence.

Exercice 15. **1.** Imparité ou duplication du sinus. **2.** Duplication de la tangente.
3. Triplication du sinus. **4.** Se ramener à des sinus.
5. Se ramener à un cosinus en divisant par 2.

Exercice 17. **1.** $f(x) = 1 + \dfrac{1}{\cos(2x)}$.

Exercice 20. **1.** $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Exercice 21. **2.** Posons $f : x \longmapsto 2^{\sin x} + 2^{\cos x}$ et $g : x \longmapsto 2^{-x}x$.
Alors $f'(x) = \ln 2 \times 2^{\sin x+\cos x}(g(\cos x) - g(\sin x))$.

Exercice 27. Il faut dériver...

Exercice 28. **1.** Calculer la tangente.

Exercice 36. On pourra exploiter la parité et réécrire th en lien avec l'exponentielle.

Éléments de réponses

Exercice 3. **1.** 1. **2.** 0. **3.** 0. **4.** 0. **5.** $+\infty$. **6.** $+\infty$.

Exercice 4. **1.** $\{\ln 7\}$. **2.** $\left\{e^{-3/2}, e^4\right\}$. **3.** $\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$. **4.** $\{1;2\}$.
5. $]-\infty\,,-1[\, \cup\,]-1\,,-\frac{3}{5}] \cup [-\frac{1}{3}\,,+\infty[$. **6.** $\mathbb{R}_+$. **7.** $\{1;4\}$. **8.** $\varnothing$. **9.** $]-\infty\,,-7]$.

Exercice 5. $\left\{(e^{-1}, e^2), (e^2, e^{-1})\right\}$.

Exercice 6. $e^\pi > \pi^e$.

Exercice 7. **2.** $\{1\}$.

Exercice 11. **1.** Strictement croissante. **2.** Strictement décroissante.

Exercice 12. **1.** $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et $\tan\dfrac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$.
2. $\tan\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$, $\cos\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Exercice 13. **1.** $[-\frac{\pi}{4}\,,\frac{\pi}{4}] + 2\pi\mathbb{Z}$. **2.** $]-\frac{\pi}{3}\,,\frac{4\pi}{3}[+ 2\pi\mathbb{Z}$. **3.** $[-\frac{\pi}{4}\,,\frac{\pi}{4}] + \pi\mathbb{Z}$.

Exercice 15. **1.** $\pi\mathbb{Z} \cup \dfrac{2\pi}{3}\mathbb{Z}$. **2.** $\left\{0, \pm\dfrac{\pi}{6}\right\} + \pi\mathbb{Z}$. **3.** $\pi\mathbb{Z}$. **4.** $\left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right\} + 2\pi\mathbb{Z}$.
5. $\left\{0, -\dfrac{2\pi}{3}\right\} + 2\pi\mathbb{Z}$.

Exercice 16. $]0\,,1[+ 2\mathbb{Z}$.

Exercice 17. **1.** f est définie sur $\left]0\,,\dfrac{\pi}{4}\right[+ \dfrac{\pi}{4}\mathbb{Z}$, π-périodique et impaire, $f'(x) = \dfrac{2\sin(2x)}{\cos^2(2x)}$ et $\lim\limits_{0} f = 2$, $\lim\limits_{\frac{\pi}{4}^-} f = +\infty$, $\lim\limits_{\frac{\pi}{4}^+} f = -\infty$, $\lim\limits_{\frac{\pi}{2}} f = 0$.
2. f est définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et paire,
$f'(x) = 3(\cos(3x) + \cos x) = 12\cos x\left(\cos x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\cos x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Exercice 18. Par télescopage

$$\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{\pi}{2^k}\sin\frac{3\pi}{2^k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{\pi}{2^{k-1}} - \cos\frac{\pi}{2^{k-2}} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2^{n-1}} - 1\right).$$

Exercice 20. **2.** $\left\{0, \dfrac{\pi}{2}\right\} + 2\pi\mathbb{Z}$.

Exercice 22. $\dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 23. $f : x \longmapsto \operatorname{Arctan}(\tan x)$ est π-périodique et $f(x) = x$, pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 25. $\cos(\operatorname{Arctan} x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ et $\sin(\operatorname{Arctan} x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Exercice 26. **1.** $\dfrac{3}{5}$. **2.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **3.** 0. **4.** $\dfrac{1}{6}$.

Exercice 27. **1.** π. **2.** $\dfrac{\operatorname{Arccos} x}{2}$. **3.** $\operatorname{Arcsin} x$. **4.** π. **5.** $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\operatorname{Arctan} x}{2}$. **6.** $\dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 28. **1.** $\operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan} k = \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{k^2+k+1}$. **2.** $\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 29. **3.** $\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 30. **2.** $\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{5} + \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{8} = \dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 33. $\operatorname{ch}(nx)\dfrac{\operatorname{sh}((n+1)x)}{\operatorname{sh} x}$.

Exercice 34. **1.** 1.