# 5 Fonctions usuelles

**Cahier de calcul :** fiches 9 à 11.

## Logarithme, exponentielle et puissances

### Exercice 1 ●●○○

Étudier chacune des fonctions suivantes.

**1.** $x \longmapsto e^{1/\ln x}$.
**2.** $x \longmapsto \ln(e^x + e^{-x})$.
**3.** $x \longmapsto \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.
**4.** $x \longmapsto \dfrac{x^3}{x^2-3}$.
**5.** $x \longmapsto \ln\dfrac{1+x}{1-x}$.
**6.** $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{\ln|x|}{x}}$.
**7.** $x \longmapsto \sqrt[4]{x^2-2x-3}$.
**8.** $x \longmapsto \dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{3}\sqrt{|x^2-16|}$.
**9.** $x \longmapsto x^{x^3}$.

### Exercice 2 ●○○○ Où l'on démontre que $-1 = 1$...

Commenter la « démonstration » suivante.

$$-1 = (-1)^1 = (-1)^{\frac{2}{2}} = \left((-1)^2\right)^{\frac{1}{2}} = (1)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

### Exercice 3 ●●○○

Déterminer les limites suivantes.

**1.** $(x^x)^x$ en $0^+$.
**2.** $x^{x^x}$ en $0^+$.
**3.** $\dfrac{(x^x)^x}{x^{x^x}}$ en $+\infty$.
**4.** $\dfrac{x-1}{x}e^{1/x}$ en $0^-$.
**5.** $\dfrac{a^{b^x}}{b^{a^x}}$ en $+\infty$, où $1 < a < b$.
**6.** $\dfrac{a^{a^x}}{x^{x^a}}$ en $+\infty$, où $a > 1$.

### Exercice 4 ●●○○

Résoudre les (in)équations suivantes.

**1.** $2\,\mathrm{e}^x - 35\,\mathrm{e}^{-x} = 9$.
**2.** $2(\ln x)^2 = 12 + 5\ln x$.
**3.** $x^x = \dfrac{3}{4}\sqrt{6}$.
**4.** $(x^x)^x = x^{x^x}$.
**5.** $\ln|x+1| - \ln|2x+1| \leqslant \ln 2$.
**6.** $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.
**7.** $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.
**8.** $\ln(-x-3)+\ln(x+4) \geqslant \ln(x-5)$.
**9.** $\ln(-x-3) \geqslant \ln\left(\dfrac{x-5}{x+4}\right)$.

### Exercice 5 ●○○○

Résoudre le système $\begin{cases} 2\dfrac{\ln y}{\ln x} + 2\dfrac{\ln x}{\ln y} = -5 \\ xy = \mathrm{e}. \end{cases}$

### Exercice 6 ●○○○

Comparer les réels $\mathrm{e}^\pi$ et $\pi^\mathrm{e}$.

### Exercice 7 ●○○○

**1.** Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Étudier la fonction $x \longmapsto a^x$ sur $\mathbb{R}$.
**2.** Résoudre l'équation $2^x + 3^x = 5$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

### Exercice 8 ●○○○

**1.** Soit $I$ un intervalle, $u \in \mathscr{D}(I,\mathbb{R})$ strictement positive et $v \in \mathscr{D}(I,\mathbb{R})$. Montrer que $u^v$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
**2.** On note $f$ la fonction $x \longmapsto x^x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
  **a.** Étudier la fonction $f$.
  **b.** Déterminer une équation de la tangente de $f$ en 1, ainsi que la position relative du graphe de $f$ par rapport à cette tangente.

### Exercice 9 ●●○○

Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, $\quad \mathrm{e}^x \geqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

### Exercice 10 ●●○○

Soit $\alpha \in [0\,,1]$.

**1.** Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\quad (1+x)^\alpha \leqslant 1 + \alpha x$.
**2.** En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\alpha}{k}\right) \geqslant (n+1)^\alpha$.

### Exercice 11 ●●○○

**1.** Étudier la monotonie de $t \longmapsto \dfrac{(1+t)\ln(1+t)}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
**2.** En déduire, pour tous $a, b > 0$ avec $a \leqslant b$, la monotonie de $x \longmapsto \dfrac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
**3.** En déduire que, pour tous $a, b > 0$, $\quad \ln\left(1+\dfrac{a}{b}\right)\ln\left(1+\dfrac{b}{a}\right) \leqslant \ln^2 2$.

## Fonctions trigonométriques

**Exercice 12** ●○○○

1. En considérant $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$, déterminer les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\tan\frac{\pi}{12}$.
2. Calculer $\tan\frac{\pi}{8}$, $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

**Exercice 13** ●○○○ Résoudre graphiquement les inéquations suivantes, d'inconnue $x\in\mathbb{R}$,

1. $\cos x \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$.
2. $\sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
3. $|\tan x| \leqslant 1$.

**Exercice 14** ●●○○ Montrer que, pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$,

$$|\sin(nx)| \leqslant n|\sin x|.$$

**Exercice 15** ●●●○ Montrer que la fonction $f$ définie sur $]0\,,1]$ par

$$f(x)=(1-x)\sin\frac{\pi}{x}$$

est bornée. Atteint-elle ses bornes ?

**Exercice 16** ●●○○ Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x\in\mathbb{R}$,

1. $\sin x+\sin(2x)=0$.
2. $\tan(2x)=3\tan x$.
3. $2\sin x+\sin(3x)=0$.
4. $3\tan x = 2\cos x$.
5. $\cos x = 1+\sqrt{3}\sin x$.

**Exercice 17** ●●○○ Déterminer l'ensemble de définition de la fonction

$$x\longmapsto \ln\left(\tan\frac{x\pi}{2}\right).$$

**Exercice 18** ●●●○ Étudier chacune des fonctions suivantes :

1. $x\longmapsto \frac{\tan(2x)}{\tan x}$.
2. $x\longmapsto \sin(3x)+3\sin x$.

**Exercice 19** ●●○○ Simplifier, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi}{2^k}\sin\frac{3\pi}{2^k}$.

**Exercice 20** ●○○○

1. Montrer que, pour tout $x\in\left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[$, $\quad \tan x > x$.
2. Montrer que la fonction $x\longmapsto\frac{x}{\sin x}$ est bijective de $\left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ sur son image que l'on précisera.

**Exercice 21** ●●○○

1. Étudier la fonction $x\longmapsto\cos^3 x+\sin^3 x$.
2. Résoudre l'équation $\cos^3 x+\sin^3 x=1$, d'inconnue $x\in\mathbb{R}$.

**Exercice 22** ●●●○

1. Étudier les variations de la fonction $x\longmapsto 2^{-x}x$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire les variations de $x\longmapsto 2^{\sin x}+2^{\cos x}$ sur $\left[0\,,\frac{\pi}{4}\right]$.
3. En déduire que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\quad 3\leqslant 2^{|\sin x|}+2^{|\cos x|}\leqslant 2^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

**Exercice 23** ●○○○ Simplifier $\quad \operatorname{Arctan}\tan\left(-\frac{11\pi}{4}\right)$.

**Exercice 24** ●○○○ Tracer le graphe de la fonction $\quad x\longmapsto\operatorname{Arctan}(\tan x)$.

**Exercice 25** ●●○○ Étudier chacune des fonctions suivantes.

1. $x\longmapsto x\operatorname{Arctan}\frac{1}{x}$.
2. $x\longmapsto x\operatorname{Arctan}\frac{1}{x-1}$.

**Exercice 26** ●○○○ Simplifier $\cos(\operatorname{Arctan} x)$ et $\sin(\operatorname{Arctan} x)$, pour tout $x\in\mathbb{R}$.

**Exercice 27** ●●○○ Résoudre les équations suivantes – dans un domaine à préciser :

1. $\operatorname{Arcsin} x=\operatorname{Arccos}\frac{4}{5}$.
2. $\operatorname{Arcsin}(2x)=\operatorname{Arccos} x$.
3. $\operatorname{Arcsin}(\tan x)=x$.
4. $\operatorname{Arctan}(2x)+\operatorname{Arctan}(3x)=\frac{\pi}{4}$.

**Exercice 28** ●●○○ Simplifier les expressions suivantes.

1. $\operatorname{Arccos}(-x) + \operatorname{Arccos} x$.
2. $\operatorname{Arctan}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.
3. $\operatorname{Arctan}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
4. $\operatorname{Arccos}(\operatorname{th} x) + 2\operatorname{Arctan}(\mathrm{e}^x)$
5. $\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$.
6. $\operatorname{Arctan}(\mathrm{e}^x) - \operatorname{Arctan}\left(\operatorname{th}\dfrac{x}{2}\right)$.

**Exercice 29** ●●●○

1. Simplifier, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan} k$.
2. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Arctan}\frac{1}{k^2+k+1}$.

**Exercice 30** ●●●○ La *suite de Fibonacci* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_n + F_{n+1}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+1}^2 - F_nF_{n+2} = (-1)^n$ *(identité de Cassini).*
2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{F_{2n}} = \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{F_{2n+1}} + \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{F_{2n+2}}$.
3. En déduire l'existence et la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Arctan}\frac{1}{F_{2k+1}}$.

**Exercice 31** ●●●○ **Formule de Machin**

1. Montrer que $\dfrac{\pi}{4} = \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{3}$.
2. Calculer $\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{5} + \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{8}$.
3. 
   a. Exprimer $\tan(4x)$ en fonction de $\tan x$, pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{8}, \dfrac{\pi}{8}\right[ + \dfrac{\pi}{4}\mathbb{Z}$.
   
   b. En déduire la *formule de Machin* $\dfrac{\pi}{4} = 4\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{5} - \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{239}$.

La *formule de Machin*, découverte par John Machin en 1706, a longtemps servi à calculer les premières décimales de $\pi$, dans la mesure où l'on sait calculer assez facilement les arc tangentes. Selon cette terminologie, la formule de la question **1** est appelé une *formule de type Machin* et il en existe beaucoup d'autres, *e.g.* $\dfrac{\pi}{4} = 2\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{3} + \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{7}$.

## Fonctions hyperboliques

**Exercice 32** ●○○○ Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

1. $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$.
2. $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$.
3. $\operatorname{th}(x+y) = \dfrac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y}$.

**Exercice 33** ●○○○ Montrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$ possède un unique point fixe.

**Exercice 34** ●●○○ Factoriser la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(2kx)$, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

**Exercice 35** ●●●○

1. Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{th} x}{x}$ ?
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{th}(2x) = \dfrac{2\operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}$.
3. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) = \frac{x}{\operatorname{th} x}.$$

**Exercice 36** ●●○○ Montrer que si $x = \ln\left(\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{y}{2}\right)\right)$, alors

$$\operatorname{th}\frac{x}{2} = \tan\frac{y}{2}, \qquad \operatorname{th} x = \sin y \qquad \text{et} \qquad \operatorname{ch} x = \frac{1}{\cos y}.$$

**Exercice 37** ●●●○ Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\operatorname{th} x| \geqslant \dfrac{|x|}{1+|x|}$.

## Indications

**Exercice 14.** Procéder par récurrence.

**Exercice 16.** **1.** Imparité ou duplication du sinus. **2.** Duplication de la tangente.
**3.** Triplication du sinus. **4.** Se ramener à des sinus.
**5.** Se ramener à un cosinus en divisant par 2.

**Exercice 18.** **1.** $f(x) = 1 + \dfrac{1}{\cos(2x)}$.

**Exercice 21.** **1.** $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

**Exercice 22.** **2.** Posons $f : x \longmapsto 2^{\sin x} + 2^{\cos x}$ et $g : x \longmapsto 2^{-x}x$.
Alors $f'(x) = \ln 2 \times 2^{\sin x + \cos x}(g(\cos x) - g(\sin x))$.

**Exercice 28.** Il faut dériver...

**Exercice 29.** **1.** Calculer la tangente.

## Éléments de réponses

**Exercice 3.** **1.** 1. **2.** 0. **3.** 0. **4.** 0. **5.** $+\infty$. **6.** $+\infty$.

**Exercice 4.** **1.** $\{\ln 7\}$. **2.** $\left\{\mathrm{e}^{-3/2}, \mathrm{e}^4\right\}$. **3.** $\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$. **4.** $\{1;2\}$.
**5.** $]-\infty\,,-1[\,\cup\,]-1\,,-\frac{3}{5}]\cup[-\frac{1}{3}\,,+\infty[$. **6.** $\mathbb{R}_+$. **7.** $\{1;4\}$. **8.** $\varnothing$. **9.** $]-\infty\,,-7]$.

**Exercice 5.** $\left\{(\mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e}^2), (\mathrm{e}^2, \mathrm{e}^{-1})\right\}$.

**Exercice 6.** $\mathrm{e}^\pi > \pi^\mathrm{e}$.

**Exercice 7.** **2.** $\{1\}$.

**Exercice 11.** **1.** Strictement croissante. **2.** Strictement décroissante.

**Exercice 12.** **1.** $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et $\tan\dfrac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$.
**2.** $\tan\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$, $\cos\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

**Exercice 13.** **1.** $\left[-\frac{\pi}{4}\,,\frac{\pi}{4}\right] + 2\pi\mathbb{Z}$. **2.** $\left]-\frac{\pi}{3}\,,\frac{4\pi}{3}\right[ + 2\pi\mathbb{Z}$. **3.** $\left[-\frac{\pi}{4}\,,\frac{\pi}{4}\right] + \pi\mathbb{Z}$.

**Exercice 16.** **1.** $\pi\mathbb{Z} \cup \dfrac{2\pi}{3}\mathbb{Z}$. **2.** $\left\{0, \pm\dfrac{\pi}{6}\right\} + \pi\mathbb{Z}$. **3.** $\pi\mathbb{Z}$. **4.** $\left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right\} + 2\pi\mathbb{Z}$.
**5.** $\left\{0, -\dfrac{2\pi}{3}\right\} + 2\pi\mathbb{Z}$.

**Exercice 17.** $]0\,,1[ + 2\mathbb{Z}$.

**Exercice 18.** **1.** $f$ est définie sur $\left]0\,,\dfrac{\pi}{4}\right[ + \dfrac{\pi}{4}\mathbb{Z}$, $\pi$-périodique et impaire, $f'(x) = \dfrac{2\sin(2x)}{\cos^2(2x)}$ et $\lim\limits_{0} f = 2$, $\lim\limits_{\frac{\pi}{4}^-} f = +\infty$, $\lim\limits_{\frac{\pi}{4}^+} f = -\infty$, $\lim\limits_{\frac{\pi}{2}} f = 0$.
**2.** $f$ est définie sur $\mathbb{R}$, $2\pi$-périodique et paire,
$$f'(x) = 3(\cos(3x) + \cos x) = 12\cos x\left(\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

**Exercice 19.** Par télescopage
$$\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{\pi}{2^k}\sin\frac{3\pi}{2^k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{\pi}{2^{k-1}} - \cos\frac{\pi}{2^{k-2}} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2^{n-1}} - 1\right).$$

**Exercice 21.** **2.** $\left\{0, \dfrac{\pi}{2}\right\} + 2\pi\mathbb{Z}$.

**Exercice 23.** $\dfrac{\pi}{4}$.

**Exercice 24.** $f : x \longmapsto \operatorname{Arctan}(\tan x)$ est $\pi$-périodique et $f(x) = x$, pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

**Exercice 26.** $\cos(\operatorname{Arctan} x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ et $\sin(\operatorname{Arctan} x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

**Exercice 27.** **1.** $\dfrac{3}{5}$. **2.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **3.** 0. **4.** $\dfrac{1}{6}$.

**Exercice 28.** **1.** $\pi$. **2.** $\dfrac{\operatorname{Arccos} x}{2}$. **3.** $\operatorname{Arcsin} x$. **4.** $\pi$. **5.** $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\operatorname{Arctan} x}{2}$. **6.** $\dfrac{\pi}{4}$.

**Exercice 29.** **1.** $\operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan} k = \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{k^2+k+1}$. **2.** $\dfrac{\pi}{2}$.

**Exercice 30.** **3.** $\dfrac{\pi}{2}$.

**Exercice 31.** **2.** $\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{5} + \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{8} = \dfrac{\pi}{4}$.

**Exercice 34.** $\operatorname{ch}(nx)\dfrac{\operatorname{sh}((n+1)x)}{\operatorname{sh} x}$.

**Exercice 35.** **1.** 1.