

# Rappels et compléments pour l'étude des fonctions

Cahier de calcul : fiche 8.

Banque CCINP :  $\emptyset$ .

## Propriétés éventuelles d'une fonction

— **Exercice 1** ●○○○ — ☒ Étudier la parité de  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln\left(\frac{2e^x + 1}{e^x + 2}\right)$ .

— **Exercice 2** ●●○○ — ☐ Montrer que toute fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

— **Exercice 3** ●●○○ — ☐ ☒ Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$   
Déterminer l'ensemble des périodes de la fonction  $f$ .

— **Exercice 4** ●○○○ —

1. Démontrer le théorème 19.
2. Que peut-on dire de la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante ?

— **Exercice 5** ●●○○ — ☒

On considère  $n$  fonctions numériques  $f_1, \dots, f_n$  définies sur  $\mathbb{R}$ . Parmi ces  $n$  fonctions,  $p$  sont décroissantes ( $0 \leq p \leq n$ ) et  $n - p$  sont croissantes.  
La fonction  $f_n \circ f_{n-1} \cdots \circ f_1$  est-elle monotone ? Le cas échéant, quelle est sa monotonie ?

— **Exercice 6** ●●○○ — ☐ ☒ Soit  $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ . Écrire une assertion mathématique traduisant le fait que la fonction  $f$  n'est monotone sur aucun segment non trivial.

— **Exercice 7** ●○○○ — Soit les fonctions numériques  $f$  et  $g$  définies par :

$$f(x) = 2x^3 - 3x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x-1}.$$

Donner l'ensemble de définition et les variations de  $g \circ f$  et de  $f \circ g$ .

— **Exercice 8** ●○○○ —

1. On considère la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^2}{x^2 - 2x + 2}$ .  
a.  $f$  est-elle majorée sur  $\mathbb{R}$  ? Minorée sur  $\mathbb{R}$  ?  
b.  $f$  admet-elle sur  $\mathbb{R}$  un maximum ? Un minimum ? Un extremum local ?
2. Mêmes questions pour la fonction  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ .

— **Exercice 9** ●●○○ — ☐ ☒

Déterminer toutes les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  croissantes et pour lesquelles  $f \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$ .

— **Exercice 10** ●●○○ — ☒

Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction – non dérivable a priori. On suppose que, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $f(x)e^{f(x)} = x$ . Déterminer les variations de  $f$ .

## Dérivées

— **Exercice 11** ●●○○ — ☒ Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son ensemble de définition, son ensemble de dérivabilité et l'expression de sa dérivée.

1.  $x \mapsto \left(\frac{2x-1}{3x-4}\right)^3$
2.  $x \mapsto \ln(x^5 + 1)$
3.  $x \mapsto e^{x\sqrt{x}}$
4.  $x \mapsto \sin^3(3x^3 - 3x + 3)$
5.  $x \mapsto \ln^7(x^2 - 1)$
6.  $x \mapsto \sqrt{e^x + 2e^{-x} - 3}$

— **Exercice 12** ●○○○ — Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ .  
Que dire de  $f'$  lorsque  $f$  est paire ? impaire ? périodique ?

— **Exercice 13** ●●○○ — ☐ ☒ Montrer que les fonctions suivantes sont indéfiniment dérivables sur une partie de  $\mathbb{R}$  à déterminer et calculer leurs dérivées successives.

1.  $x \mapsto \frac{1}{x+a} \quad (a \in \mathbb{R})$ .
2.  $x \mapsto \frac{1}{x+a} \quad (a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$ .
3.  $x \mapsto \frac{1+x}{1-x}$ .
4.  $x \mapsto \frac{x - \cos \alpha}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1} \quad (\alpha \in ]0, \pi[)$ .

## Bijection

— **Exercice 14** ●○○ — ☒ Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{3}{x-2}$ .

La fonction  $f$  est-elle une bijection de  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$  sur  $f[\mathbb{R} \setminus \{2\}]$ ? Le cas échéant, quelle est sa fonction réciproque?

— Exercice 15 ●○○ — Réciproque d'une bijection impaire

Soit  $A$  et  $B$  deux parties de  $\mathbb{R}$  et  $f : A \longrightarrow B$  une bijection de  $A$  sur  $B$ . Si  $A$  est symétrique par rapport à 0 et  $f$  impaire, montrer que sa réciproque  $f^{-1}$  est impaire.

**— Exercice 16 ●○○○ —**

1. Montrer que la fonction  $x \mapsto \sin x$  est bijective de  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  sur un intervalle que l'on précisera. On note  $\text{Arcsin}$  sa réciproque.
2. Déterminer les propriétés de la fonction  $\text{Arcsin}$ .

— Exercice 17 ●○○○ — ☒

Déterminer le nombre de racines réelles des fonctions polynomiales suivantes :

- 1.**  $x \mapsto x^5 - x^3 + 1$ .      **2.**  $x \mapsto 4x^3 - 18x^2 + 24x - 9$ .

— Exercice 18 ●○○○ —

1. Montrer que l'équation  $x \ln x = 1$ , d'inconnue  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , possède une et une seule solution.
2. Montrer que l'équation  $e^{-x^2} = e^x - 1$ , d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ , possède une et une seule solution.

— **Exercice 19** ●○○ — 💡 Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,  $\frac{e^x - 1}{x} \geq x + e - 2$ .

Exercise 17. 1. 1. 1. 3.

**Exercise 14.**  $f^{-1} : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}, y \mapsto \frac{y}{2y+3}.$

 $\mathbb{R}$ .
$$4. \quad \mathbb{N} \ni u \longmapsto x : (u)f \longleftarrow \frac{(1+x)\mathrm{soc} \, \mathbb{Z} - x}{u_n(1)} \sum_{i=1}^{0=y} (1-x)^{-i} \mathrm{soc} \, y$$
$$3. \forall k \in \mathbb{N}_*, f_{(k)} : x \mapsto \frac{(1+x)^{k+1}}{2^{k+1} \times k!} \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$
$$2. \text{ } \forall k \in \mathbb{N}, f_{(k)} : x \longmapsto \frac{(v+x)^{k+1}}{(1-x)^{k+1}} \text{ sur } \mathbb{R}.$$

**Exercice 13.** 1.  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $f_{(k)} : x \mapsto \frac{(-1)^k (d+x)}{(d+x)^{k+1}} \text{ sur } \mathbb{R} \setminus \{-d\}$ .

$$\frac{\mathfrak{z}^{-x-\varrho} \mathfrak{z}^{+x} \wedge \mathfrak{z}}{\mathfrak{z}^{\mathfrak{z}} \mathfrak{z}^{\mathfrak{z}}} \longleftarrow x : f' \text{ et } ]\infty, +\infty[ \cap [0, -\infty[ = {}^p \mathcal{D} = {}^f \mathcal{D} . \mathbf{9}$$
$$5. \mathcal{D}^f \mathcal{D}^p = [-\infty, -1] \cap [1, +\infty] \text{ et } f'x \longmapsto \frac{1-x^2}{(1-x)(1-x^p)}.$$
$$\mathbf{4.} \mathcal{D}_d^f = \mathbb{R} \text{ et } f : x \longmapsto 9(x^2 - 1) \cos(x^3 - x) \sin(x^3 - x) \text{.}$$
*definition).*

3  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^+$  et  $f' : x \mapsto \frac{2}{3} \sqrt{x} e^{\sqrt{x}}$  (pour la dérivabilité en 0 il faut revenir à la

$$2. \mathcal{D}_f = \mathcal{D}_p = [-1, +\infty[ \text{ et } f' : x \longmapsto \frac{1+x}{x^2}.$$
$$\mathbf{1}.\mathcal{D}_f\mathcal{D}^p=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{3}{4}\right\}\} \text{ et } f'x\longmapsto \frac{-15(2x-1)_2}{3(3-x-4)_4}.$$

**Exercice 11.** On note  $\mathcal{D}_f$  l'ensemble de définition de  $f$  et  $\mathcal{D}_d$  son ensemble de dérivabilité.

**EXERCISE 10.**  $\int$  est stochastique croissante sur  $\mathbb{R}^+$ .

### Exercício 10

$$\cdot \cdot [((\hat{h})f > (x)f \text{ } \forall \hat{h} \geq x \quad \text{ } '[q \text{ } v] \ni \hat{h} \text{ } x_E] \text{ } \forall \hat{h} \text{ } ((\hat{h})f < (x)f \text{ } \forall \hat{h} \geq x \quad \text{ } '[q \text{ } v] \ni \hat{h} \text{ } x_E)] \cdots$$

**Exercise 6.**  $\forall a, b \in \mathbb{R}, a > b \iff \dots$

·(impar).

**EXERCICE 5.** La composée  $f_1 \circ \dots \circ f_n$  est croissante (resp. décroissante) si  $p$  est pair (resp. impair).

**Exercise 3:** The ensemble  $\mathcal{E}$  is composed of

### Exercice 3

**Exercice 1.** Impaire.

**EXERCICE 19.** Étudier  $e^x - x^2 + (2 - e)x - 1$ .

factoriser dans  $\mathbb{C}$  son dénominateur.

**Exercice 13. 4.** On peut décomposer en éléments simples la traction, en commençant par

**EXERCISE 6:** On boarder checker, a player chooses between:

### Exercice 6

## Exercises 2, 3