4 Rappels et compléments pour l'étude des fonctions

Cahier de calcul : fiche 8. **Banque CCINP :** $\varnothing$.

Propriétés éventuelles d'une fonction

Exercice 1 ●○○○ ☑ Étudier la parité de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \ln\left(\dfrac{2e^x+1}{e^x+2}\right)$.

Exercice 2 ●●○○ 💡 Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice 3 ●●○○ 💡☑ Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 \text{ si } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}. \end{cases}$
Déterminer l'ensemble des périodes de la fonction f.

Exercice 4 ●○○○

1. Démontrer le théorème 19.
2. Que peut-on dire de la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante ?

Exercice 5 ●●○○ ☑
On considère n fonctions numériques $f_1, \dots, f_n$ définies sur $\mathbb{R}$. Parmi ces n fonctions, p sont décroissantes ($0 \leqslant p \leqslant n$) et $n-p$ sont croissantes.
La fonction $f_n \circ f_{n-1} \cdots \circ f_1$ est-elle monotone ? Le cas échéant, quelle est sa monotonie ?

Exercice 6 ●●○○ 💡☑ Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Écrire une assertion mathématique traduisant le fait que la fonction f n'est monotone sur aucun segment non trivial.

Exercice 7 ●○○○ Soit les fonctions numériques f et g définies par :

$$f(x) = 2x^3 - 3x + 1 \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{1}{x-1}.$$

Donner l'ensemble de définition et les variations de $g \circ f$ et de $f \circ g$.

Exercice 8 ●○○○

1. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \dfrac{x^2}{x^2-2x+2}$.
   - **a.** f est-elle majorée sur $\mathbb{R}$? Minorée sur $\mathbb{R}$?
   - **b.** f admet-elle sur $\mathbb{R}$ un maximum ? Un minimum ? Un extremum local ?
2. Mêmes questions pour la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.

Exercice 9 ●●○○ 💡☑
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ croissantes et pour lesquelles $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 10 ●●○○ ☑
Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction – non dérivable a priori. On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x)\,\mathrm{e}^{f(x)} = x$. Déterminer les variations de f.

Dérivées

Exercice 11 ●●○○ ☑ Pour chacune des fonctions suivantes déterminer son ensemble de définition, son ensemble de dérivabilité et l'expression de sa dérivée.

1. $x \longmapsto \left(\dfrac{2x-1}{3x-4}\right)^3$.
2. $x \longmapsto \ln\big(x^5+1\big)$.
3. $x \longmapsto \mathrm{e}^{x\sqrt{x}}$.
4. $x \longmapsto \sin^3\big(3x^3-3x+3\big)$.
5. $x \longmapsto \ln^7\big(x^2-1\big)$.
6. $x \longmapsto \sqrt{\mathrm{e}^x + 2\,\mathrm{e}^{-x} - 3}$.

Exercice 12 ●○○○ Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
Que dire de f' lorsque f est paire ? impaire ? périodique ?

Exercice 13 ●●●○ 💡☑ Montrer que les fonctions suivantes sont indéfiniment dérivables sur une partie de $\mathbb{R}$ à déterminer et calculer leurs dérivées successives.

1. $x \longmapsto \dfrac{1}{x+a}$ $\quad (a \in \mathbb{R})$.
2. $x \longmapsto \dfrac{1}{x+a}$ $\quad (a \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R})$.
3. $x \longmapsto \dfrac{1+x}{1-x}$.
4. $x \longmapsto \dfrac{x-\cos\alpha}{x^2-2x\cos\alpha+1}$ $\quad (\alpha \in\,]0\,,\pi[)$.

Bijection

Exercice 14 ●○○○ Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$.
La fonction f est-elle une bijection de $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ sur $f[\mathbb{R}\backslash\{2\}]$? Le cas échéant, quelle est sa fonction réciproque ?

Exercice 15 ●●○○ **Réciproque d'une bijection impaire**
Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow B$ une bijection de A sur B. Si A symétrique par rapport à 0 et f impaire, montrer que sa réciproque f^{-1} est impaire.

Exercice 16 ●○○○

1. Montrer que la fonction $x \longmapsto \sin x$ est bijective de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle que l'on précisera. On note Arcsin sa réciproque.
2. Déterminer les propriétés de la fonction Arcsin.

Exercice 17 ●○○○
Déterminer le nombre de racines réelles des fonctions polynomiales suivantes :

1. $x \longmapsto x^5 - x^3 + 1$. **2.** $x \longmapsto 4x^3 - 18x^2 + 24x - 9$.

Exercice 18 ●○○○

1. Montrer que l'équation $x \ln x = 1$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$, possède une et une seule solution.
2. Montrer que l'équation $e^{-x^2} = e^x - 1$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, possède une et une seule solution.

Exercice 19 ●●○○ Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{e^x - 1}{x} \geqslant x + e - 2$.

Indications

Exercice 2, 3 et 9. Procéder par analyse-synthèse.

Exercice 6. On pourra chercher à nier l'énoncé contraire.

Exercice 13. 4. On peut décomposer en élément simple la fraction, en commençant par factoriser dans $\mathbb{C}$ son dénominateur.

Exercice 19. Étudier $e^x - x^2 + (2-e)x - 1$.

Éléments de réponses

Exercice 1. Impaire.

Exercice 3. L'ensemble des périodes de f est $\mathbb{Q}^*$.

Exercice 5. La composée $f_1 \circ \cdots \circ f_n$ est croissante (resp. décroissante) si p est pair (resp. impair).

Exercice 6. $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b \implies \ldots$
$\ldots [(\exists x, y \in [a, b], \quad x \leqslant y \text{ et } f(x) > f(y)) \text{ et } (\exists x, y \in [a, b], \quad x \leqslant y \text{ et } f(x) < f(y))]$.

Exercice 9. $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 10. f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 11. On note $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f et $\mathcal{D}_d$ son ensemble de dérivabilité.

1. $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_d = \mathbb{R}\backslash\{\frac{4}{3}\}$ et $f' : x \longmapsto \dfrac{-15(2x-1)^2}{(3x-4)^4}$.

2. $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_d =]-1, +\infty[$ et $f' : x \longmapsto \dfrac{5x^4}{x^5+1}$.

3 $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_d = \mathbb{R}_+$ et $f' : x \longmapsto \dfrac{3}{2}\sqrt{x}\, e^{x\sqrt{x}}$ *(pour la dérivabilité en 0 il faut revenir à la définition !).*

4. $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_d = \mathbb{R}$ et $f' : x \longmapsto 9(3x^2-1)\cos(3x^3-3x+3)\sin^2(3x^3-3x+3)$.

5. $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_d =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ et $f' : x \longmapsto \dfrac{14x \ln^6(x^2-1)}{x^2-1}$.

6. $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_d =]-\infty, 0] \cup [\ln 2, +\infty[$ et $f' : x \longmapsto \dfrac{e^x - 2e^{-x}}{2\sqrt{e^x + 2e^{-x} - 3}}$.

Exercice 13. 1. $\forall k \in \mathbb{N}, \quad f^{(k)} : x \longmapsto \dfrac{(-1)^k k!}{(x+a)^{k+1}}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{-a\}$.

2. $\forall k \in \mathbb{N}, \quad f^{(k)} : x \longmapsto \dfrac{(-1)^k k!}{(x+a)^{k+1}}$ sur $\mathbb{R}$.

3. $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad f^{(k)} : x \longmapsto \dfrac{2 \times k!}{(1-x)^{k+1}}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

4. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)} : x \longmapsto \dfrac{(-1)^n n!}{(x^2 - 2\cos(\alpha)x + 1)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} (-1)^k \cos(k\alpha)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14. $f^{-1} : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}\backslash\{2\}, y \longmapsto \dfrac{2y+3}{y}$.

Exercice 17. 1. 1. **1.** 3.