4 Rappels et compléments pour l'étude des fonctions

Cahier de calcul : fiche 8.

Propriétés éventuelles d'une fonction

Exercice 1 ●○○○ Étudier la parité de $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, x\longmapsto \ln\left(\dfrac{2e^x+1}{e^x+2}\right)$.

Exercice 2 ●●○○ Montrer que toute fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice 3 ●●○○ Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}1 \text{ si } x\in\mathbb{Q},\\ 0 \text{ si } x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}.\end{cases}$
Déterminer l'ensemble des périodes de la fonction f.

Exercice 4 ●○○○

1. Démontrer le théorème 19.
2. Que peut-on dire de la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante ?

Exercice 5 ●●○○ On considère n fonctions numériques $f_1,\dots,f_n$ définies sur $\mathbb{R}$. Parmi ces n fonctions, p sont décroissantes $(0\leqslant p\leqslant n)$ et $n-p$ sont croissantes. La fonction $f_n\circ f_{n-1}\cdots\circ f_1$ est-elle monotone ? Le cas échéant, quelle est sa monotonie ?

Exercice 6 ●●○○ Soit $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Écrire une assertion mathématique traduisant le fait que la fonction f n'est monotone sur aucun segment non trivial.

Exercice 7 ●○○○ Soit les fonctions numériques f et g définies par :
$$f(x)=2x^3-3x+1 \qquad \text{et} \qquad g(x)=\frac{1}{x-1}.$$
Donner l'ensemble de définition et les variations de $g\circ f$ et de $f\circ g$.

Exercice 8 ●○○○

1. On considère la fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, x\longmapsto \dfrac{x^2}{x^2-2x+2}$.
   - **a.** f est-elle majorée sur $\mathbb{R}$? Minorée sur $\mathbb{R}$?
   - **b.** f admet-elle sur $\mathbb{R}$ un maximum ? Un minimum ? Un extremum local ?
2. Mêmes questions pour la fonction $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, x\longmapsto \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.

Exercice 9 ●●○○ Déterminer toutes les fonctions $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ croissantes et pour lesquelles $f\circ f=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 10 ●●○○ Soit $f:\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}_+$ une fonction – non dérivable a priori. On suppose que, pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $f(x)\,\mathrm{e}^{f(x)}=x$. Déterminer les variations de f.

Dérivées

Exercice 11 ●●○○ Pour chacune des fonctions suivantes déterminer son ensemble de définition, son ensemble de dérivabilité et l'expression de sa dérivée.

1. $x\longmapsto\left(\dfrac{2x-1}{3x-4}\right)^3$.
2. $x\longmapsto \ln\left(x^5+1\right)$.
3. $x\longmapsto \mathrm{e}^{x\sqrt{x}}$.
4. $x\longmapsto \sin^3\left(3x^3-3x+3\right)$.
5. $x\longmapsto \ln^7\left(x^2-1\right)$.
6. $x\longmapsto \sqrt{\mathrm{e}^x+2\,\mathrm{e}^{-x}-3}$.

Exercice 12 ●○○○ Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Que dire de f' lorsque f est paire ? impaire ? périodique ?

Exercice 13 ●●●○ Montrer que les fonctions suivantes sont indéfiniment dérivables sur une partie de $\mathbb{R}$ à déterminer et calculer leurs dérivées successives.

1. $x\longmapsto\dfrac{1}{x+a}$ $(a\in\mathbb{R})$.
2. $x\longmapsto\dfrac{1}{x+a}$ $(a\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R})$.
3. $x\longmapsto\dfrac{1+x}{1-x}$.
4. $x\longmapsto\dfrac{x-\cos\alpha}{x^2-2x\cos\alpha+1}$ $(\alpha\in\,]0\,,\pi[)$.

Bijection

Exercice 14 ●○○○ Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{3}{x-2}$. f est-elle une bijection de $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ sur $f(\mathbb{R}\backslash\{2\})$? Le cas échéant, quelle est sa fonction réciproque ?

Exercice 15 ●●○○ **Réciproque d'une bijection impaire**
Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow B$ une bijection de A sur B. Si A symétrique par rapport à 0 et f impaire, montrer que sa réciproque f^{-1} est impaire.

Exercice 16 ●○○○

1. Montrer que la fonction $x \longmapsto \sin x$ est bijective de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle que l'on précisera. On note Arcsin sa réciproque.
2. Déterminer les propriétés de la fonction Arcsin.

Exercice 17 ●○○○ Déterminer le nombre de racines réelles des fonctions polynomiales suivantes :

1. $x \longmapsto x^5-x^3+1$. **2.** $x \longmapsto 4x^3-18x^2+24x-9$.

Exercice 18 ●○○○

1. Montrer que l'équation $x\ln x=1$, d'inconnue $x\in\mathbb{R}_+^*$, possède une et une seule solution.
2. Montrer que l'équation $\mathrm{e}^{-x^2}=\mathrm{e}^x-1$, d'inconnue $x\in\mathbb{R}$, possède une et une seule solution.

Exercice 19 ●●○○ Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}\geqslant x+\mathrm{e}-2$.

Indications

Exercice 2, 3 et 9. Procéder par analyse-synthèse.

Exercice 13. 4. On peut décomposer en élément simple la fraction, en commençant par factoriser dans $\mathbb{C}$ son dénominateur.

Exercice 19. Étudier $\mathrm{e}^x-x^2+(2-\mathrm{e})x-1$.

Éléments de réponses

Exercice 1. Impaire.

Exercice 3. L'ensemble des périodes de f est $\mathbb{Q}^*$.

Exercice 5. La composée $f_1\circ\cdots\circ f_n$ est croissante (resp. décroissante) si p est pair (resp. impair).

Exercice 9. $f=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 10. f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 11. On note $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f et $\mathcal{D}_d$ son ensemble de dérivabilité.

1. $\mathcal{D}_f=\mathcal{D}_d=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{4}{3}\right\}$ et $f' : x\longmapsto \dfrac{-15(2x-1)^2}{(3x-4)^4}$.
2. $\mathcal{D}_f=\mathcal{D}_d=\left]-1,+\infty\right[$ et $f' : x\longmapsto \dfrac{5x^4}{x^5+1}$.
3. $\mathcal{D}_f=\mathcal{D}_d=\mathbb{R}_+$ et $f' : x\longmapsto \dfrac{3}{2}\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{x\sqrt{x}}$ *(pour la dérivabilité en 0 il faut revenir à la définition !).*
4. $\mathcal{D}_f=\mathcal{D}_d=\mathbb{R}$ et $f' : x\longmapsto 9\left(3x^2-1\right)\cos\left(3x^3-3x+3\right)\sin^2\left(3x^3-3x+3\right)$.
5. $\mathcal{D}_f=\mathcal{D}_d=\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$ et $f' : x\longmapsto \dfrac{14x\ln^6\left(x^2-1\right)}{x^2-1}$.
6. $\mathcal{D}_f=\mathcal{D}_d=\left]-\infty,0\right]\cup\left[\ln 2,+\infty\right[$ et $f' : x\longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x-2\,\mathrm{e}^{-x}}{2\sqrt{\mathrm{e}^x+2\,\mathrm{e}^{-x}-3}}$.

Exercice 13. 1. $\forall k\in\mathbb{N}$, $f^{(k)} : x\longmapsto \dfrac{(-1)^k k!}{(x+a)^{k+1}}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{-a\}$.

2. $\forall k\in\mathbb{N}$, $f^{(k)} : x\longmapsto \dfrac{(-1)^k k!}{(x+a)^{k+1}}$ sur $\mathbb{R}$.
3. $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $f^{(k)} : x\longmapsto \dfrac{2\times k!}{(1-x)^{k+1}}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.
4. $\forall n\in\mathbb{N}$, $f^{(n)} : x\longmapsto \dfrac{(-1)^n n!}{(x^2-2\cos(\alpha)x+1)^{n+1}}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}(-1)^k\cos(k\alpha)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14. $f^{-1} : \mathbb{R}^*\longrightarrow\mathbb{R}\backslash\{2\}, y\longmapsto \dfrac{2y+3}{y}$.

Exercice 17. 1. 1. **1.** 3.