

3 | Ensembles et applications

Cahier de calcul : $\emptyset$.

Banque CCINP : $\emptyset$.

Ensembles

— Exercice 1 •••• —

Exhiber des exemples pour illustrer les deux affirmations suivantes.

1. Sous l'hypothèse $A \cup B = A \cup C$, on ne peut pas conclure que $B = C$.
2. Sous l'hypothèse $A \cap B = A \cap C$, on ne peut pas conclure que $B = C$.

— Exercice 2 •••• — ☒

Soit A, B, C trois parties d'un ensemble E . Simplifier les expressions suivantes.

1. $A \cap (\overline{A} \cup B)$.
2. $A \cup (\overline{A} \cap B)$.
3. $A \cap (\overline{A} \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B} \cup C)$.
4. $A \cup (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$.

— Exercice 3 •••• —

Démontrer les affirmations suivantes, où X, Y et Z désignent des sous-ensembles d'un ensemble E .

1. Si $X \subset Y$ et $Y \subset Z$, alors $X \subset Z$. (*transitivité de l'inclusion*)
2. $X \subset Y \iff \overline{Y} \subset \overline{X}$.
3. Si $X \subset Y$, alors $X \cap Z \subset Y \cap Z$ et $X \cup Z \subset Y \cup Z$.
4. $X = (X \cap Y) \cup (X \setminus Y)$.
5. $(X \cap Y) \cap (X \cap Z) = X \cap Y \cap Z$.

— Exercice 4 •••• —

Soit A et B deux ensembles. Établir les équivalences :

$$A \subset B \iff A \cup B = B \iff A \cap B = A.$$

— Exercice 5 •••• — ☒

- Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E .
1. Que valent $A \setminus \emptyset$, $A \setminus A$ et $\overline{\overline{A}}$?
 2. Montrer que $A \setminus B = A \iff B \setminus A = B$.
 3. Montrer que $(A \setminus B) \setminus B = A \setminus B$.
 4. Montrer que $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.
 5. Montrer que $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.
 6. Montrer que $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$.

— Exercice 6 •••• —

Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E . Montrer que

1. $(\overline{A \cap B}) \setminus C = (\overline{C} \setminus B) \cup (\overline{A} \setminus C)$.
2. $A \cup B = B \cap C \implies A \subset B \subset C$.
3. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
4. $A \cap B = A \cup B \iff A = B$.

— Exercice 7 •••• — ☒

Expliciter les ensembles suivants

1. $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n} \right]$.
2. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right]$.

— Exercice 8 •••• — ☒

Étudier les inclusions $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ et $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, où

$$\mathcal{A} = \left\{ \frac{\varepsilon}{k(k+1)} \right\}_{\substack{k \in \mathbb{N}^* \\ \varepsilon \in \{-1, 1\}}} \quad \text{et} \quad \mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right\}_{m, n \in \mathbb{N}^*}.$$

— Exercice 9 •••• —

Décrire géométriquement l'ensemble

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Montrer qu'il ne s'agit pas du produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$.

— Exercice 10 •••• — ☒

Soit E un ensemble et A et B deux parties de E . Résoudre les équations suivantes, d'inconnue X une partie de E ,

1. $A \cup X = B$.
2. $A \cap X = B$.

— Exercice 11 •••• — ☒

On note $E = \{1\}$ et $F = \{1, \pi\}$.

1. Détailler $\mathcal{P}(E)$, $\mathcal{P}(F)$ puis $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.
2. Est-ce que l'un de ces ensembles est inclus dans l'un des autres?

— Exercice 12 •••• — ☒

Soit $E = \{0, 1, \{0\}, \{0, 1\}\}$. Parmi les propositions suivantes, dites lesquelles sont vraies.

1. $\{0\} \in E$.
2. $\{0\} \in \mathcal{P}(E)$.
3. $\{\{1\}\} \subset E$.
4. $\{0, 1\} \subset E$.
5. $\{\{0\}, 0\} \subset \mathcal{P}(E)$.
6. $\{\{0\}, \emptyset\} \in \mathcal{P}(E)$.
7. $\{\{1, \{0, 1\}\}, \{0\}, E\} \subset \mathcal{P}(E)$.
8. $\{\{\{0, 1\}\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.

— **Exercice 13** ●○○○ — Soit A une partie d'un ensemble E . Démontrer que

1. $(\forall X \in \mathcal{P}(E), \quad A \cup X = E) \implies A = E$.
2. $(\forall X \in \mathcal{P}(E), \quad A \cap X = \emptyset) \implies A = \emptyset$.

— **Exercice 14** ●●○○ — ☒ Soit A et B deux ensembles.

1. Démontrer que $A \subset B$ si et seulement si $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.
2. Que pensez-vous des égalités suivantes ?
 - a. $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
 - b. $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

Si l'égalité est fausse, peut-on la remplacer par une inclusion ?

— **Exercice 15** ●●○○ —

Soit E un ensemble, $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_0, A_1, \dots, A_n$ des sous-ensembles de E tels que

$$\emptyset = A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq \dots \subsetneq A_n = E.$$

On pose, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$. Montrer que $(B_1, \dots, B_n)$ est une partition de E .

— **Exercice 16** ●●○○ — ☒ **Fonctions indicatrices**

Soit E un ensemble et A, B et $A_1, \dots, A_n$ des parties de E .

1. Caractériser à l'aide des fonctions indicatrices les propriétés ensemblistes suivantes :
 - a. $A \subset B$.
 - b. A et B sont disjoints.
 - c. $\{A_1, \dots, A_n\}$ est une partition de E .
2. Retrouver à l'aide des fonctions indicatrices :
 - a. les propriétés de commutativité, d'associativité et de distributivité de l'union et de l'intersection ;
 - b. l'équivalence $A \cap B = A \cup B \iff A = B$.

Applications définies explicitement

— **Exercice 17** ●○○○ — ☒ Soit f l'application de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, par $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'image directe de A et l'image réciproque de B par l'application f .

1. $A =]-1, 0[\cup]0, 1[$ et $B =]-1, 1]$.
2. $A = B =]-\infty, 0[$.
3. $A = \mathbb{Z}^*$ et $B =]0, 1[$.

— **Exercice 18** ●●○○ — ☒ Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$ qui, à tout complexe z , associe son module. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'image directe de A et l'image réciproque de B par l'application f .

1. $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists x \in \mathbb{R}, \quad z = x + 2i\}$ et $B = [-1, 1]$.
2. $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists x \in [0, 1], \quad z = \sqrt{x} + i\sqrt{1-x}\}$ et $B =]0, 1]$.
3. $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists x \in \mathbb{R}, \quad z = (1 + \cos x) + i \sin x\}$ et $B = [1, 2]$.

— **Exercice 19** ●○○○ — ☒ Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

1. Soit $y \in \mathbb{R}$. Déterminer le nombre d'antécédents de y .
2. L'application f est-elle bijective ?
3. Montrer que : $\forall x \in [-1, 1], \quad f(x) \in [-1, 1]$.
L'application $g : [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1]$ induite par f est-elle bijective ?

— **Exercice 20** ●○○○ — ☒

Soit les fonctions f définies ci-dessous. Montrer que f est une bijection entre des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ que l'on précisera et déterminer sa fonction réciproque.

1. $f(x) = \frac{2+x}{3-x}$.
2. $f(x) = \frac{1-3x}{4+5x}$.
3. $f(x) = \frac{x}{1-x}$.

— **Exercice 21** ●○○○ — ☒

1. Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?
 - a. $(x, y) \longmapsto 2y$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
 - b. $(x, y) \longmapsto (1, x - y, y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.
 - c. $(x, y) \longmapsto (2x + y, 3x - 2y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
 - d. $(x, y) \longmapsto (2x + y, x^2 + y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
2. (●●●) Entre quelles sous-ensembles maximaux de $\mathbb{R}^2$ l'application de la question 1.d induit-elle une bijection ?

— **Exercice 22** ●○○○ — ☒

On note f l'application $n \longmapsto 2n$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et g l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par

$$g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Étudier l'injectivité et la surjectivité de f et g . Que vaut $g \circ f$? Que faut-il en retenir ?

Applications abstraites

— **Exercice 23** ●●○○ — Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

1. Soit $(B_j)_{j \in J}$ une famille de parties de F . Montrer que

$$f^{-1}\left[\bigcup_{j \in J} B_j\right] = \bigcup_{j \in J} f^{-1}[B_j] \quad \text{et} \quad f^{-1}\left[\bigcap_{j \in J} B_j\right] = \bigcap_{j \in J} f^{-1}[B_j]$$

2. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E . Montrer que

$$f\left[\bigcup_{i \in I} A_i\right] = \bigcup_{i \in I} f[A_i] \quad \text{et} \quad f\left[\bigcap_{i \in I} A_i\right] \subset \bigcap_{i \in I} f[A_i]$$

3. Proposer un exemple pour lequel l'inclusion précédente est stricte.
4. Montrer que cette inclusion est une égalité lorsque f est supposée injective.

— **Exercice 24** ●○○○ —

Soit E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$ deux applications.

On suppose $f \circ g \circ f$ bijective. Montrer que f et g le sont aussi.

— **Exercice 25** ●○○○ — Soit E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$ une application. On suppose que $f \circ f = f$ et que f est injective ou surjective. Montrer que $f = \text{Id}_E$.

— **Exercice 26** ●●○○ — Soit E, F et G trois ensembles. Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : E \longrightarrow G$ des applications. Considérons l'application

$$h : E \longrightarrow F \times G, x \longmapsto (f(x), g(x)).$$

1. Montrer que si f ou g sont injectives, alors h aussi. La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que si h est surjective, alors f et g aussi. La réciproque est-elle vraie ?

— **Exercice 27** ●●○○ — Soit E un ensemble non vide, $A, B \in \mathcal{P}(E)$ et f l'application définie par

$$f : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \\ X & \longmapsto & (X \cup A, X \cup B). \end{cases}$$

1. Montrer que f n'est pas surjective.
2. Montrer que f est injective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

— **Exercice 28** ●●○○ — **Caractérisations injectivité/surjectivité**

Soit E et F deux ensembles et $f \in F^E$.

- On suppose E NON VIDE. Montrer que f est injective si et seulement si f admet un *inverse à gauche*, i.e. il existe $g \in E^F$ tel que $g \circ f = \text{Id}_E$.
 - Montrer que f est surjective si et seulement si f admet un *inverse à droite*, i.e. il existe $g \in E^F$ tel que $f \circ g = \text{Id}_F$.
- On suppose E NON VIDE. Montrer que f est injective si et seulement si f est *simplifiable à gauche*, i.e.

$$\forall H, \quad \forall h, h' \in E^H, \quad f \circ h = f \circ h' \implies h = h'.$$

- Montrer que f est surjective si et seulement si f est *simplifiable à droite*, i.e.

$$\forall H, \quad \forall h, h' \in H^F, \quad h \circ f = h' \circ f \implies h = h'.$$

— **Exercice 29** ●●○○ — **Caractérisations injectivité/surjectivité (bis)**

Soit E et F deux ensembles et $f \in F^E$.

- Pour une partie A de E , comparer A et $f^{-1}[f[A]]$. Faire un dessin !
 - Pour une partie B de F , comparer B et $f[f^{-1}[B]]$. Faire un dessin !
- Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
 - f est injective ;
 - $\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad f^{-1}[f[A]] = A$;
 - $\forall A, A' \in \mathcal{P}(E), \quad f[A \cap A'] = f[A] \cap f[A']$;
 - $\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad f[\mathbb{C}_E A] \subset \mathbb{C}_F f[A]$.
- Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
 - f est surjective ;
 - $\forall B \in \mathcal{P}(F), \quad f[f^{-1}[B]] = B$;
 - $\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad f[\mathbb{C}_E A] \supset \mathbb{C}_F f[A]$.

4. Montrer que f est bijective si et seulement si

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad f[\mathbb{C}_E A] = \mathbb{C}_F f[A].$$

— **Exercice 30** ●●○○ —

- Si une application est injective sur deux parties de son ensemble de définition, l'est-elle sur leur réunion ?
- Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties de E , croissante pour l'inclusion et telle que $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Montrer que si $f|_{A_n}$ est injective, pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors f l'est sur E .

— **Exercice 31** ●●○○ —  Soit f et g deux bijections de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}$. Montrer que l'application fg n'est pas une bijection de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}$.

— **Exercice 32** ●●●○ —  **Une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$** Montrer que l'application

$$(p, q) \mapsto \frac{(p+q)(p+q+1)}{2} + q$$

est une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$.

— **Exercice 33** ●●●○ —

1. Soit E un ensemble et $f : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ une application. Montrer que f n'est pas surjective. On pourra considérer l'ensemble $\{x \in E \mid x \notin f(x)\}$.
2. En déduire que l'on ne peut pas considérer « l'ensemble de tous les ensembles ».

— **Exercice 34** ●●●○ —  **Mines-Ponts MP 2022**

Soit $E = \{1, \dots, n\}$ et $\mathcal{F} = \mathcal{P}(E)$. Montrer qu'il existe une unique bijection g de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ telle que $g(F) \cap F = \emptyset$, pour tout $F \in \mathcal{F}$.

$$g_{ulaires} T(n) = \sum_{k=0}^n k.$$

Exercice 32. Représenter graphiquement cette fonction et s'intéresser aux nombres trian-

Exercice 31. Raisonner par l'absurde et considérer des antécédents de 1 et -1 par fg .

Exercice 10. Procéder par analyse-synthèse et faire des dessins.

Indications

Éléments de réponses

Exercice 2. 1. $A \cap B$. 2. $A \cup B$. 3. $A \cap B \cap C$. 4. $A \cup B \cup C$.

Exercice 5. 1. A , $\emptyset$ et A .

Exercice 7. 1. $[-1, 1]$. 2. $[-1, 1]$.

Exercice 8. $\emptyset \subset \mathcal{B}$ et $\mathcal{B} \not\subset \emptyset$, puisque $\frac{k(k+1)}{\varepsilon} = \frac{k}{\varepsilon} - \frac{k+1}{\varepsilon}$ et $0 \in \mathcal{B}$.

Exercice 10. 1. L'ensemble des solutions est $\left\{ \begin{array}{l} \emptyset \\ \text{si } A \not\subset B \\ \{X \in \mathcal{P}(E) \mid B \setminus A \subset X \subset B\} \\ \text{si } A \subset B \end{array} \right.$

2. L'ensemble des solutions est $\left\{ \begin{array}{l} \emptyset \\ \text{si } B \not\subset A \\ \{X \in \mathcal{P}(E) \mid B \subset X \subset B \cup \overline{A}\} \\ \text{si } B \subset A \end{array} \right.$

Exercice 11. a. $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{1\}\}, \{\{2\}\}, \{\{3\}\}, \{\{1, 2\}\}, \{\{1, 3\}\}, \{\{2, 3\}\}, \{\{1, 2, 3\}\}\}$, dans la mesure où $E \subset F$!

Exercice 12. 1. Vrai. 2. Vrai. 3. Faux. 4. Vrai. 5. Faux. 6. Faux. 7. Vrai. 8. Vrai.

Exercice 14. 2.a. Vrai. 2.b. Seule l'inclusion $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$ est vraie en général.

Exercice 16. 1.a. $\mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$. 1.b. $\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B = 0$. 1.a. ($\forall i \in [1, n], \mathbb{1}_{A_i} \neq 0$) et $\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i} = 1$.

Exercice 17. 1. $f[A] = [1, +\infty[$ et $f^{-1}[B] =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.
2. $f[A] = [0, +\infty[$ et $f^{-1}[B] = \emptyset$.
3. $f[A] = \{\frac{n}{2} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ et $f^{-1}[B] =]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[$.

Exercice 18. 1. $f[A] = [2, +\infty[$ et $f^{-1}[B] = \overline{D}(0, 1)$.
2. $f[A] = \{1\}$ et $f^{-1}[B] = \overline{D}(0, 1) \setminus \{0\}$. 3. $f[A] = [0, 2]$ et $f^{-1}[B] = \overline{D}(0, 2) \setminus D(0, 1)$.

Exercice 19. 1. $\text{Card}(f^{-1}[\{y\}]) = \begin{cases} 0 & \text{si } |y| > 1 \\ 1 & \text{si } y \in \{0, \pm 1\} \\ 2 & \text{si } 0 < |y| < 1 \end{cases}$. 2. Non. 3. Oui.

Exercice 20. 1. La réciproque est $x \mapsto \frac{3x-2}{x+1}$. 2. La réciproque est $x \mapsto \frac{1-4x}{5x+3}$. 3. La réciproque est $x \mapsto \frac{x}{x+1}$.

Exercice 21. 1.a. Surjective et non injective. 1.b. Injective et non surjective. 1.c. Bijective. 1.d. Non injective et non surjective.

Exercice 22. f est injective et non surjective, g est surjective et non injective et $g \circ f = \text{Id}_{\mathbb{N}}$ est notamment bijective.

Exercice 34. Clairement l'involution $A \mapsto \overline{A}$ de $\mathcal{F}$ convient. Il s'agit donc de montrer qu'il n'y en a pas d'autre !