3 Ensembles et applications

Cahier de calcul : $\varnothing$.

Ensembles

Exercice 1 ●○○○ Exhiber des exemples pour illustrer les deux affirmations suivantes.

1. Sous l'hypothèse $A \cup B = A \cup C$, on ne peut pas conclure que $B = C$.
2. Sous l'hypothèse $A \cap B = A \cap C$, on ne peut pas conclure que $B = C$.

Exercice 2 ●○○○ Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E. Simplifier :

1. $A \cap (\overline{A} \cup B)$.
2. $A \cup (\overline{A} \cap B)$.
3. $A \cap (\overline{A} \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B} \cup C)$.
4. $A \cup (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$.

Exercice 3 ●○○○ Démontrer les affirmations suivantes, où X, Y et Z désignent des sous-ensembles d'un ensemble E.

1. Si $X \subset Y$ et $Y \subset Z$, alors $X \subset Z$. *(transitivité de l'inclusion)*
2. $X \subset Y \iff \overline{Y} \subset \overline{X}$.
3. Si $X \subset Y$, alors $X \cap Z \subset Y \cap Z$ et $X \cup Z \subset Y \cup Z$.
4. $X = (X \cap Y) \cup (X \backslash Y)$.
5. $(X \cap Y) \cap (X \cap Z) = X \cap Y \cap Z$.

Exercice 4 ●○○○ Soit A et B deux ensembles. Établir les équivalences :

$$A \subset B \iff A \cup B = B \iff A \cap B = A.$$

Exercice 5 ●○○○ Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E.

1. Que valent $A \backslash \varnothing$, $A \backslash A$ et $\overline{\overline{A}}$?
2. Montrer que $A \backslash B = A \iff B \backslash A = B$.
3. Montrer que $(A \backslash B) \backslash B = A \backslash B$.
4. Montrer que $(A \cap B) \backslash C = (A \backslash C) \cap (B \backslash C)$.
5. Montrer que $(A \cup B) \backslash C = (A \backslash C) \cup (B \backslash C)$.
6. Montrer que $(A \backslash B) \backslash C = (A \backslash C) \backslash (B \backslash C) = A \backslash (B \cup C)$.

Exercice 6 ●○○○ Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E. Montrer que :

1. $(\overline{A \cap B}) \backslash C = (\overline{C} \backslash B) \cup (\overline{A} \backslash C)$
2. $A \cup B = B \cap C \implies A \subset B \subset C$.
3. $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$.
4. $A \cap B = A \cup B \iff A = B$.

Exercice 7 ●●○○ Expliciter les ensembles suivants

1. $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$.
2. $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left]-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right[$.

Exercice 8 ●○○○ Étudier les inclusions $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$ et $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$, où

$$\mathscr{A} = \left\{ \frac{\varepsilon}{k(k+1)} \right\}_{\substack{k \in \mathbb{N}^* \\ \varepsilon \in \{-1,1\}}} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{B} = \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right\}_{m,n \in \mathbb{N}^*}.$$

Exercice 9 ●●○○ Décrire géométriquement l'ensemble

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqslant 1 \right\}.$$

Montrer qu'il ne s'agit pas du produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$.

Exercice 10 ●●●○ Soit E un ensemble et A et B deux parties de E. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue X une partie de E,

1. $A \cup X = B$
2. $A \cap X = B$.

Exercice 11 ●○○○ On note $E = \{1\}$ et $F = \{1, \pi\}$.

1. Détailler $\mathscr{P}(E)$, $\mathscr{P}(F)$ puis $\mathscr{P}(\mathscr{P}(E))$.
2. Est-ce que l'un de ces ensembles est inclus dans l'un des autres ?

Exercice 12 ●○○○ Soit $E = \{0, 1, \{0\}, \{0,1\}\}$. Parmi les propositions suivantes, dites lesquelles sont vraies :

1. $\{0\} \in E$.
2. $\{0\} \in \mathscr{P}(E)$.
3. $\{\{1\}\} \subset E$.
4. $\{0,1\} \subset E$.
5. $\{\{0\}, 0\} \subset \mathscr{P}(E)$.
6. $\{\{0\}, \varnothing\} \in \mathscr{P}(E)$.
7. $\{\{1, \{0,1\}\}, \{0\}, E\} \subset \mathscr{P}(E)$.
8. $\{\{\{0,1\}\}\} \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(E))$.

Exercice 13 ●○○○ Soit A une partie d'un ensemble E. Démontrer que :

1. $(\forall X \in \mathscr{P}(E), \quad A \cup X = E) \implies A = E$.
2. $(\forall X \in \mathscr{P}(E), \quad A \cap X = \varnothing) \implies A = \varnothing$.

Exercice 14 ●●○○ Soit A et B deux ensembles.

1. Démontrer que $A \subset B$ si et seulement si $\mathscr{P}(A) \subset \mathscr{P}(B)$.
2. Que pensez-vous des égalités suivantes ?

   a. $\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$. **b.** $\mathscr{P}(A \cup B) = \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$.

   Si l'égalité est fausse, peut-on la remplacer par une inclusion ?

Exercice 15 ●●○○ Soit E un ensemble, $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_0, A_1, \ldots, A_n$ des sous-ensembles de E tels que

$$\varnothing = A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq \ldots \subsetneq A_n = E.$$

On pose, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $B_k = A_k \backslash A_{k-1}$. Montrer que $(B_1, \ldots, B_n)$ est une partition de E.

Exercice 16 ●●○○ **Fonctions indicatrices**
Soit E un ensemble et A, B et $A_1, \ldots, A_n$ des parties de E.

1. Caractériser à l'aide des fonctions indicatrices les propriétés ensemblistes suivantes :

   a. $A \subset B$. **b.** A et B sont disjoints. **c.** $\{A_1, \ldots, A_n\}$ est une partition de E.
2. Retrouver à l'aide des fonctions indicatrices :

   a. les propriétés de commutativité, d'associativité et de distributivité de l'union et de l'intersection ;

   b. l'équivalence $A \cap B = A \cup B \iff A = B$.

Applications définies explicitement

Exercice 17 ●○○○ Soit f l'application de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, par $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'image directe de A et l'image réciproque de B par l'application f.

1. $A =]-1, 0[\cup]0, 1[$ et $B =]-1, 1]$. **2.** $A = B =]-\infty, 0[$.
3. $A = \mathbb{Z}^*$ et $B =]0, 1[$.

Exercice 18 ●●○○ Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$ qui, à tout complexe z, associe son module. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'image directe de A et l'image réciproque de B par l'application f.

1. $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists x \in \mathbb{R}, \quad z = x + 2i\}$ et $B = [-1, 1]$.
2. $A = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \exists x \in [0, 1], \quad z = \sqrt{x} + i\sqrt{1-x}\right\}$ et $B =]0, 1]$.
3. $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists x \in \mathbb{R}, \quad z = (1 + \cos x) + i \sin x\}$ et $B = [1, 2]$.

Exercice 19 ●○○○ Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

a. Soit $y \in \mathbb{R}$. Déterminer le nombre d'antécédents de y.

b. L'application f est-elle bijective ?

c. Montrer que : $\forall x \in [-1, 1], \quad f(x) \in [-1, 1]$.
L'application $g : [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1]$ induite par f est-elle bijective ?

Exercice 20 ●○○○ Soit les fonctions f définies ci-dessous. Montrer que f est une bijection entre des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ que l'on précisera et déterminer sa fonction réciproque.

1. $f(x) = \dfrac{2+x}{3-x}$. **2.** $f(x) = \dfrac{1-3x}{4+5x}$. **3.** $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$.

Exercice 21 ●○○○

1. Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

   a. $(x, y) \longmapsto 2y$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

   b. $(x, y) \longmapsto (1, x - y, y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.

   c. $(x, y) \longmapsto (2x + y, 3x - 2y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

   d. $(x, y) \longmapsto (2x + y, x^2 + y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
2. (●●●) Entre quelles sous-ensembles maximaux de $\mathbb{R}^2$ l'application de la question **1.d** induit-elle une bijection ?

Exercice 22 ●○○○ On note f l'application $n \longmapsto 2n$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et g l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par :

$$g(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \dfrac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Étudier l'injectivité et la surjectivité de f et g. Que vaut $g \circ f$? Que faut-il en retenir ?

Applications abstraites

Exercice 23 ●●○○ Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

1. Soit $(B_j)_{j\in J}$ une famille de parties de F. Montrer que
$$f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j) \qquad \text{et} \qquad f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j).$$
2. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E. Montrer que
$$f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i) \qquad \text{et} \qquad f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$$
3. Proposer un exemple pour lequel l'inclusion précédente est stricte.
4. Montrer que cette inclusion est une égalité lorsque f est supposée injective.

Exercice 24 ●○○○ Soit E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$ deux applications. On suppose $f \circ g \circ f$ bijective. Montrer que f et g le sont aussi.

Exercice 25 ●○○○ Soit E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$ une application. On suppose que $f \circ f = f$ et que f est injective ou surjective. Montrer que $f = \mathrm{Id}_E$.

Exercice 26 ●●○○ Soit E, F et G trois ensembles. Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : E \longrightarrow G$ des applications. Considérons l'application
$$h : E \longrightarrow F \times G, x \longmapsto (f(x), g(x)).$$
1. Montrer que si f ou g sont injectives, alors h aussi. La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que si h est surjective, alors f et g aussi. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 27 ●●○○ Soit E un ensemble non vide, $A, B \in \mathscr{P}(E)$ et f l'application définie par
$$f : \left|\begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \times \mathscr{P}(E) \\ X & \longmapsto & (X \cup A, X \cup B) \end{array}\right.$$
1. Montrer que f n'est pas surjective.
2. Montrer que f est injective si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.

Exercice 28 ●●●○ Caractérisations de l'injectivité et de la surjectivité
Soit E et F deux ensembles et $f \in F^E$.

1. **a.** On suppose E NON VIDE. Montrer que f est injective si et seulement si f admet un *inverse à gauche*, *i.e.* il existe $g \in E^F$ tel que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.
   b. Montrer que f est surjective si et seulement si f admet un *inverse à droite*, *i.e.* il existe $g \in E^F$ tel que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.
2. **a.** On suppose E NON VIDE. Montrer que f est injective si et seulement si f est *simplifiable à gauche*, *i.e.*
$$\forall H, \quad \forall h, h' \in E^H, \quad f \circ h = f \circ h' \implies h = h'.$$
   b. Montrer que f est surjective si et seulement si f est *simplifiable à droite*, *i.e.*
$$\forall H, \quad \forall h, h' \in H^F, \quad h \circ f = h' \circ f \implies h = h'.$$

Exercice 29 ●●●○ Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité (bis)
Soit E et F deux ensembles et $f \in F^E$.

1. **a.** Pour une partie A de E, comparer A et $f^{-1}(f(A))$. Faire un dessin !
   b. Pour une partie B de F, comparer B et $f(f^{-1}(B))$. Faire un dessin !
2. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (i) f est injective ;
   (ii) $\forall A \in \mathscr{P}(E), \quad f^{-1}(f(A)) = A$;
   (iii) $\forall A, A' \in \mathscr{P}(E), \quad f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$;
   (iv) $\forall A \in \mathscr{P}(E), \quad f(\complement_E A) \subset \complement_F f(A)$.
3. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (i) f est surjective ;
   (ii) $\forall B \in \mathscr{P}(F), \quad f\big(f^{-1}(B)\big) = B$;
   (iii) $\forall A \in \mathscr{P}(E), \quad f(\complement_E A) \supset \complement_F f(A)$.
4. Montrer que f est bijective si et seulement si, pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$,
$$\forall A \in \mathscr{P}(E), \quad f(\complement_E A) = \complement_F f(A).$$

Exercice 30 ●●○○

1. Si une application est injective sur deux parties de son ensemble de définition, l'est-elle sur leur réunion ?
2. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de E, croissante pour l'inclusion et telle que $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Montrer que si $f|_{A_n}$ est injective, pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors f l'est sur E.

Exercice 31 ●●●○

Soit f et g deux bijections de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}$. Montrer que l'application fg n'est pas une bijection de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}$.

Exercice 32 ●●●○

1. Soit E un ensemble et $f : E \longrightarrow \mathscr{P}(E)$ une application. Montrer que f n'est pas surjective. *On pourra considérer l'ensemble* $\{x \in E \mid x \notin f(x)\}$.
2. En déduire que l'on ne peut pas considérer « l'ensemble de tous les ensembles ».

Exercice 33 ●●●○ Mines-Ponts MP 2022

Soit $E = \{1, \dots, n\}$ et $\mathcal{F} = \mathscr{P}(E)$. Montrer qu'il existe une unique bijection g de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ telle que $g(F) \cap F = \varnothing$, pour tout $F \in \mathcal{F}$.

Indications

Exercice 10. Procéder par analyse-synthèse.

Éléments de réponses

Exercice 2. **1.** $A \cap B$. **2.** $A \cup B$. **3.** $A \cap B \cap C$. **4.** $A \cup B \cup C$.

Exercice 5. **1.** A, $\varnothing$ et A.

Exercice 7. **1.** $]-1\,,1[$. **2.** $[-1\,,1]$.

Exercice 8. $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$ et $\mathscr{B} \not\subset \mathscr{A}$, puisque $\dfrac{\varepsilon}{k(k+1)} = \dfrac{\varepsilon}{k} - \dfrac{\varepsilon}{k+1}$ et $0 \in \mathscr{B}$.

Exercice 10. **1.** L'ensemble des solutions est $\begin{cases} \varnothing & \text{si } A \not\subset B \\ \{X \in \mathscr{P}(E) \mid B\backslash A \subset X \subset B\} & \text{si } A \subset B. \end{cases}$

2. L'ensemble des solutions est $\begin{cases} \varnothing & \text{si } B \not\subset A \\ \{X \in \mathscr{P}(E) \mid B \subset X \subset B \cup \overline{A}\} & \text{si } B \subset A. \end{cases}$

Remarque : la résolution d'une des équations se déduit de celle de l'autre par passage au complémentaire !

Exercice 11. **a.** $\mathscr{P}(E) = \{\varnothing, \{1\}\}$, $\mathscr{P}(F) = \{\varnothing, \{1\}, \{\pi\}, \{1, \pi\}\}$ et $\mathscr{P}(\mathscr{P}(E)) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{1\}\}, \{\varnothing, \{1\}\}\}$.

b. $\mathscr{P}(E) \subset \mathscr{P}(F)$, dans la mesure où $E \subset F$!

Exercice 12. **1.** Vrai. **2.** Vrai. **3.** Faux. **4.** Vrai. **5.** Faux. **6.** Faux. **7.** Vrai. **8.** Vrai.

Exercice 14. **2.a.** Vrai. **2.b.** Seule l'inclusion $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) \subset \mathscr{P}(A \cup B)$ est vraie en général.

Exercice 16. **1.a** $\mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_B$. **1.b** $\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B = 0$. **1.a** $(\forall i \in [\![1\,,n]\!],\quad \mathbb{1}_{A_i} \neq 0)$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i} = 1$.

Exercice 17. **1.** $f(A) =]1\,,+\infty[$ et $f^{-1}(B) =]-\infty\,,-1] \cup [1\,,+\infty[$.

2. $f(A) =]0\,,+\infty[$ et $f^{-1}(B) = \varnothing$.

3. $f(A) = \left\{\frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$ et $f^{-1}(B) =]-\infty\,,-1[\cup]1\,,+\infty[$.

Exercice 18. **1.** $f(A) = [2\,,+\infty[$ et $f^{-1}(B) = \overline{D}(0,1)$.

2. $f(A) = \{1\}$ et $f^{-1}(B) = \overline{D}(0,1)\backslash\{0\}$. **3.** $f(A) = [0\,,2]$ et $f^{-1}(B) = \overline{D}(0,2)\backslash D(0,1)$.

Exercice 19. **a.** $\operatorname{Card} f^{-1}(\{y\}) = \begin{cases} 0 & \text{si } |y| > 1 \\ 1 & \text{si } y \in \{0, \pm 1\} \\ 2 & \text{si } 0 < |y| < 1 \end{cases}$. **b.** Non. **c.** Oui.

Exercice 20. **1.** La réciproque est $x \longmapsto \dfrac{3x-2}{x+1}$. **2.** La réciproque est $x \longmapsto \dfrac{1-4x}{5x+3}$.

3. La réciproque est $x \longmapsto \dfrac{x}{x+1}$.

Exercice 21. **1.a.** Surjective et non injective. **1.b.** Injective et non surjective.

1.c. Bijective. **1.d.** Non injective et non surjective.

2. Bijection de $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 1\right\}$ sur $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x + 1 \geqslant 0\right\}$ et bijection de $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leqslant 1\right\}$ sur $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x + 1 \geqslant 0\right\}$.

Exercice 22. f est injective et non surjective, g est surjective et non injective et $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ est notamment bijective.

Exercice 33. Clairement l'involution $A \longmapsto \overline{A}$ de $\mathcal{F}$ convient. Il s'agit donc de montrer qu'il n'y en a pas d'autre !