

# 33 | Espaces préhilbertiens réels

Cahier de calcul : fiche 32.

Banque CCINP : exercices 4, 5, 19, 20, 25, 23 et 24.

## Produits scalaires et inégalités

— **Exercice 1** ●○○○ — Montrer que les applications suivantes définissent des produits scalaires sur les espaces considérés.

1. L'application  $(f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)(1-t^2) dt$  sur  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ .
2. L'application  $(f, g) \mapsto f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt$  sur  $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ .
3. L'application  $(P, Q) \mapsto P(0)Q(0) + P'(1)Q'(1) + P''(2)Q''(2)$  sur  $\mathbb{R}_2[X]$ .

— **Exercice 2** ●○○○ — **Norme et distance euclidienne**

1. Montrer que la norme et la distance euclidienne d'un espace préhilbertien  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  définies à la définition 10 sont respectivement une norme et une distance au sens des définitions de la remarque 11.
2. Plus généralement, montrer que, pour toute norme  $N$  sur un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ , l'application  $(x, y) \mapsto N(x - y)$  définit une distance sur  $E$ .

— **Exercice 3** ●●○○ — **Généralisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz**

1. Montrer que l'inégalité de Cauchy-Schwarz reste valable pour une forme bilinéaire symétrique positive sur un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
2. En déduire que, pour toutes variables aléatoires réelles finies  $X$  et  $Y$ ,

$$|\mathbf{E}(XY)| \leq \sqrt{\mathbf{E}(X^2)}\sqrt{\mathbf{E}(Y^2)} \quad \text{et} \quad |\text{Cov}(X, Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y).$$

3. Montrer que si  $X$  est une variable aléatoire réelle finie centrée, alors

$$\mathbf{E}(|X|) \leq \sqrt{\mathbf{V}(X)}.$$

— **Exercice 4** ●○○○ —  **Banque d'exercices CCINP 2025 (76)**

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , pour lequel on note  $\|\cdot\|$  la norme associée.

1. **a.** Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.  
**b.** Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.
2. Soit  $E = \{f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \mid \forall x \in [a, b], f(x) > 0\}$ . Prouver que l'ensemble

$$\left\{ \int_a^b f(t) dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt \mid f \in E \right\}$$

admet une borne inférieure  $m$  et déterminer la valeur de  $m$ .

— **Exercice 5** ●○○○ —  **Banque d'exercices CCINP 2025 (79)**

Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ .

1. Soit  $h$  une fonction continue et positive de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ . Démontrer l'implication

$$\int_a^b h(x) dx = 0 \implies h = 0.$$

2. Soit  $E$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions continues de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ . On pose,

$$\forall (f, g) \in E^2, \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur  $E$ .

3. Majorer  $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x} dx$  en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

— **Exercice 6** ●●○○ —  **Inégalité de Kosmanek**

Soit  $(\Omega, \mathcal{P})$  un espace probabilisé fini et  $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ .

1. Montrer l'inégalité  $|\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)| \leq \sqrt{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(\overline{A})\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(\overline{B})}$ .
2. En déduire l'inégalité de Kosmanek  $|\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)| \leq \frac{1}{4}$ .
3. Retrouver l'inégalité précédente en considérant  $\text{Cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$ .

— **Exercice 7** ●○○○ — **Quelques inégalités** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. Montrer que, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , 
$$\sum_{k=0}^p \sqrt{\binom{p}{k}} \leq \sqrt{2^p(p+1)}.$$
2. Montrer que, pour tous  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ , 
$$\left( \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{2^k} \right)^2 \leq \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n x_k^2.$$

À quelle condition cette inégalité est-elle une égalité ?

3. Montrer que, pour tous réels  $a_1, \dots, a_n$  et pour tout  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ,

$$\sum_{i=1}^n a_i a_{\sigma(i)} \leq \sum_{i=1}^n a_i^2.$$

4. Montrer que, pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\left( \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right)^2 \leq \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}.$$

5. a. Montrer que, pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ ,  $n^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right) \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)$ .  
 b. Déterminer le minimum de  $\left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right) \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)$  lorsque  $(x_1, \dots, x_n)$  parcourt  $(\mathbb{R}_+^*)^n$ .
6. Montrer que, pour tous  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,

$$(X^T A^T B Y)^2 \leq (X^T A^T A X) (Y^T B^T B Y).$$

— **Exercice 8** ●○○○ — Soit  $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  strictement positive. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^1 t^n f(t) dt.$$

Montrer que, pour tous  $n, p \in \mathbb{N}$ ,  $I_{n+p}^2 \leq I_{2n} I_{2p}$ .

— **Exercice 9** ●●○○ —  Soit  $f, g \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  strictement positives. On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$a_n = \int_0^1 f(t)^n g(t) dt \quad \text{et} \quad u_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

1. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée.
2. Étudier la monotonie de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  via l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
3. Montrer que la suite  $(\sqrt[n]{a_n})_{n \in \mathbb{N}}$  converge, grâce au théorème de Cesàro.

— **Exercice 10** ●●○○ — **Inégalité de Selberg** Soit  $E$  un espace préhilbertien réel,  $e_1, \dots, e_n \in E$  non nuls et  $x \in E$ . On pose  $\sigma_k = \sum_{i=1}^n |\langle e_k, e_i \rangle|$ , pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

1. Montrer que, pour tous  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ ,

$$\left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \right\|^2 \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \sigma_k.$$

2. En déduire que, pour tous  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ ,

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \langle x, e_k \rangle \leq \|x\| \sqrt{\sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \sigma_k}.$$

3. En déduire l'inégalité de Selberg

$$\sum_{k=1}^n \frac{\langle x, e_k \rangle^2}{\sigma_k} \leq \|x\|^2.$$

— **Exercice 11** ●●○○ —  **Réseaux de  $\mathbb{R}^n$  (ENS PLSR MP 2022)**


On munit  $\mathbb{R}^n$  de la norme euclidienne canonique. Une partie  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  est appelée un  $L$ -groupe lorsqu'elle forme un sous-groupe de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $\text{Vect}(A) = \mathbb{R}^n$  et tel que, pour tous  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $r \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $A \cap \overline{B}(x, r)$  est fini, où  $\overline{B}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| \leq r\}$ .

1. Que dire dans le cas  $n = 1$ .
2. Soit  $e = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $\mathbb{R}^n$ . On pose

$$L_e = \{a_1 e_1 + \dots + a_n e_n \mid (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n\}.$$

- a. Montrer que  $L_e$  est un  $L$ -groupe.
- b. Soit  $e$  et  $e'$  deux bases de  $\mathbb{R}^n$ . À quelle condition a-t-on  $L_e = L_{e'}$  ?

## Orthogonalité

— **Exercice 12** ●●○○ — 

Orthonormaliser grâce à l'algorithme de Gram-Schmidt les familles suivantes.

1.  $((0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0))$  dans l'espace euclidien canonique  $\mathbb{R}^3$ .
2.  $(t \mapsto 1, t \mapsto t, t \mapsto |t|)$  dans  $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$  muni du produit scalaire

$$(f, g) \mapsto \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt.$$

— **Exercice 13** ●○○○ — ☑

1. On munit  $\mathbb{R}^4$  de sa structure euclidienne canonique.

- Déterminer une base orthonormale du plan d'équation  $\begin{cases} x + z + t = 0 \\ x - y + z = 0. \end{cases}$
- Déterminer une base orthonormale de l'orthogonal du plan d'équation

$$\begin{cases} x + y - z + t = 0 \\ x - 2y + 3z - t = 0. \end{cases}$$

2. Déterminer une base de  $\mathbb{R}_1[X]^\perp$  pour le produit scalaire de  $\mathbb{R}_3[X]$  défini par

$$(P, Q) \longleftrightarrow \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt.$$

— **Exercice 14** ●●○○ — **Une famille de polynômes orthogonaux** On pose

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}[X], \quad \langle P, Q \rangle = \int_0^{2\pi} P(\cos \theta)Q(\cos \theta) d\theta.$$

- Montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$ .
- Montrer que la famille  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des polynômes de Tchebychev est orthogonale.

— **Exercice 15** ●●○○ — ☹ Soit  $E$  un espace préhilbertien réel et  $e_1, \dots, e_n$  des vecteurs unitaires de  $E$ . On suppose que, pour tout  $x \in E$ ,  $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle^2$ .

- Montrer que la famille  $(e_1, \dots, e_n)$  est orthonormale.
- Montrer que  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ . En particulier,  $E$  est donc euclidien.

— **Exercice 16** ●●●○ — ☹☑

- Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . Montrer que  $\mathcal{B}$  est orthonormale pour un et un seul produit scalaire sur  $E$ .
- Déterminer une expression explicite de l'unique produit scalaire sur  $\mathbb{R}^2$  pour lequel la famille  $((1, 2), (2, 1))$  est orthonormale.

— **Exercice 17** ●●○○ — Soit  $E$  un espace euclidien ainsi que  $f$  et  $g$  deux endomorphismes de  $E$  qui commutent. On suppose que les matrices de  $f$  et de  $g$  dans une base orthonormale de  $E$  sont respectivement symétrique et antisymétrique. Montrer que

$$\forall x \in E, \quad \langle f(x), g(x) \rangle = 0$$

puis que

$$\forall x \in E, \quad \|(f - g)(x)\| = \|(f + g)(x)\|.$$

— **Exercice 18** ●●○○ — ☹

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel et  $u_1, \dots, u_n$  des vecteurs de  $E$  unitaires.

- Calculer  $\left\| \sum_{i=1}^n u_i \right\|$  sous l'hypothèse que  $u_1, \dots, u_n$  sont orthogonaux.

Revenant au cas général, on veut montrer que, pour certains  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ ,

$$\left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i u_i \right\| \leq \sqrt{n}.$$

On se donne pour cela des variables aléatoires  $R_1, \dots, R_n$  définies sur un même espace probabilisé fini, indépendantes et de même loi la loi de Rademacher.

- Calculer l'espérance de  $\left\| \sum_{i=1}^n R_i u_i \right\|^2$ , puis conclure.

— **Exercice 19** ●○○○ — **Banque d'exercices CCINP 2025 (77)**

Soit  $E$  un espace euclidien.

- Soit  $A$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Démontrer que  $(A^\perp)^\perp = A$ .
- Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ .
  - Démontrer que  $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ .  
(Cette égalité est valable en dimension quelconque.)
  - Démontrer que  $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$ .  
(Quelle inclusion reste valable en dimension quelconque?)

— **Exercice 20** ●○○○ — ☑ **Banque d'exercices CCINP 2025 (92)** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

On considère  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre  $n$ . On pose

$$\forall (A, B) \in E^2, \quad \langle A, B \rangle = \text{tr}(A^\top B).$$

- Prouver que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $E$ .
- On note respectivement  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques et des matrices antisymétriques de  $E$ .
  - Prouver que  $E = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ .
  - Prouver que  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})^\perp = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ .
- Soit  $F$  l'ensemble des matrices diagonales de  $E$ . Déterminer  $F^\perp$ .

— **Exercice 21** ●●● — **☒ Contre-exemple en dimension infinie**

On munit  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  du produit scalaire intégral

$$(f, g) \longmapsto \int_0^1 f(t)g(t) dt.$$

Montrer l'égalité  $F^\perp = \{0\}$  dans chacun des cas suivants.

1.  $F_1 = \{f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$ .
2.  $F_2 = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ .

— **Exercice 22** ●●● — **Familles obtusangles (Mines-Ponts MP 2022)**

Soit  $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$  une famille de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  muni de sa structure euclidienne canonique telle que  $\langle x_i, x_j \rangle < 0$ , pour  $i \neq j$ . On pose

$$x = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i \quad \text{et} \quad y = \sum_{i=1}^p |\lambda_i| x_i$$

où les  $\lambda_i$  sont des réels.

1. Comparer  $\|x\|$  et  $\|y\|$ .
2. Montrer que si  $x = 0_{\mathbb{R}^n}$ , alors les  $\lambda_i$  sont tous nuls ou tous non nuls.
3. Montrer que toute sous-famille à  $p - 1$  vecteurs des  $x_i$  est libre.
4. Donner un exemple d'une telle famille dans  $\mathbb{R}^2$  avec  $p = 3$ .
5. Montrer qu'il existe une famille de  $n + 1$  vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  vérifiant les hypothèses.

## Projection orthogonale

— **Exercice 23** ●○○ — **☒ Banque d'exercices CCINP 2025 (81)**

On définit sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  l'application  $\varphi(A, A') = \text{tr}(A^\top A')$  et on note

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

On admet que  $\varphi$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

1. Démontrer que  $\mathcal{F}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
2. Déterminer une base de  $\mathcal{F}^\perp$ .
3. Déterminer la projection orthogonale de  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  sur  $\mathcal{F}^\perp$ .
4. Calculer la distance de  $J$  à  $\mathcal{F}$ .

— **Exercice 24** ●○○ — **☒ Banque d'exercices CCINP 2025 (82)**

Soit  $E$  un espace préhilbertien et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension finie  $n$  non nulle. On admet que, pour tout  $x \in E$ , il existe un élément unique  $y_0$  de  $F$  tel que  $x - y_0$  soit orthogonal à  $F$  et que la distance de  $x$  à  $F$  soit égale à  $\|x - y_0\|$ .

Pour tous  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  et  $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ , on pose  $\langle A, A' \rangle = aa' + bb' + cc' + dd'$ .

1. Démontrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
2. Calculez la distance de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  au sous-espace vectoriel  $F$  des matrices triangulaires supérieures.

— **Exercice 25** ●○○ — **☒ Banque d'exercices CCINP 2025 (80)**

Soit  $E$  l'espace vectoriel des applications continues et  $2\pi$ -périodiques de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

1. Démontrer que  $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt$  définit un produit scalaire sur  $E$ .
2. Soit  $F$  le sous-espace vectoriel engendré par  $f : x \mapsto \cos x$  et  $g : x \mapsto \cos(2x)$ . Déterminer le projeté orthogonal sur  $F$  de la fonction  $u : x \mapsto \sin^2 x$ .

— **Exercice 26** ●○○ — **☒**

1. Dans l'espace  $\mathbb{R}^3$  muni de sa structure euclidienne canonique, on pose

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x + y\}$$

et on note  $p$  la projection orthogonale sur  $F$ . Déterminer la matrice de  $p$  dans la base canonique.

2. On munit  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de sa structure euclidienne canonique et on pose

$$F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(M) = 0\}.$$

Déterminer une expression explicite de la symétrie orthogonale par rapport à  $F$ .

3. Dans l'espace euclidien canonique  $\mathbb{R}^4$ , on pose

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y \text{ et } z = -t\}$$

et on note  $p$  la projection orthogonale sur  $F$ . Déterminer la matrice de  $p$  dans la base canonique.

4. On munit  $\mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$  du produit scalaire intégral  $(f, g) \mapsto \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt$ . Déterminer l'image de la fonction  $t \mapsto \sin t$  par la symétrie orthogonale par rapport à  $F = \text{Vect}(t \mapsto 1, t \mapsto t)$ .

— Exercice 27 ●●○○ —  Mines-Ponts MP 2022

L'espace  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est muni de sa structure euclidienne canonique.

- Déterminer l'orthogonal de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
- Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Déterminer  $\inf_{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2$ .

— Exercice 28 ●●●● — Mines-Ponts MP 2022

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et l'application  $\varphi : P \mapsto \sum_{i=0}^n (i^n - P(i))^2$  définie sur  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ .

- L'application  $\varphi$  admet-elle un minimum ?
- Calculer ce minimum.

— Exercice 29 ●●○○ —  Mines-Ponts MP 2022 Soit  $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ .

Pour  $f, g \in E$ , on pose  $B(f, g) = \int_0^1 (fg + f'g')$ .

- Montrer que  $B$  définit un produit scalaire sur  $E$ .

On pose  $F = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$  et  $G = \{g \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R}) \mid g'' = g\}$ .

- Montrer que  $F \oplus G = E$ . Expliciter la projection orthogonale sur  $G$ .
- Pour  $a, b \in \mathbb{R}$ , on pose  $E_{a,b} = \{f \in E \mid f(0) = a, f(1) = b\}$ . Exhiber un élément  $f_0$  de  $E_{a,b}$  et montrer que  $E_{a,b} = f_0 + F$ . Donner la projection orthogonale de  $f_0$  sur  $G$ . À l'aide de la décomposition de  $f_0$  déterminer

$$\inf_{f \in E_{a,b}} \int_0^1 (f^2 + f'^2).$$

— Exercice 30 ●●○○ —

- Soit  $E$  un espace euclidien de dimension non nulle,  $\mathcal{H}$  un hyperplan affine de  $E$  de direction  $H$ ,  $a$  un vecteur normal unitaire de  $H$  et  $h \in \mathcal{H}$ . Montrer que

$$\forall x \in E, \quad d(x, \mathcal{H}) = |\langle x - h, a \rangle|.$$

- On munit  $\mathbb{R}^3$  de sa structure euclidienne canonique. Soit  $\mathcal{P}$  un plan de  $\mathbb{R}^3$  d'équation  $ax + by + cz = d$ , avec  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Montrer que

$$\forall M = (x_M, y_M, z_M) \in \mathbb{R}^3, \quad d(M, \mathcal{P}) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

— Exercice 31 ●●○○ —  Matrice et déterminant de Gram

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel.

- Soit  $x_1, \dots, x_n \in E$ . On appelle *matrice de Gram de la famille*  $(x_1, \dots, x_n)$  la matrice

$$G(x_1, \dots, x_n) = (\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

et on note  $\Gamma(x_1, \dots, x_n)$  son déterminant. On se donne une base orthonormale  $\mathcal{B}$  de  $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$  et on pose  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}((x_1, \dots, x_n))$ .

- Exprimer la matrice de Gram de  $(x_1, \dots, x_n)$  en fonction de  $A$ , puis montrer que  $\Gamma(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ .
- Montrer que  $\text{Ker}(A^T A) = \text{Ker} A$ . En déduire que la famille  $(x_1, \dots, x_n)$  a le même rang que  $G(x_1, \dots, x_n)$ .
- En déduire que  $\Gamma(x_1, \dots, x_n) = 0$  si et seulement si  $(x_1, \dots, x_n)$  est liée.
- Montrer que si  $x_n$  est orthogonal aux vecteurs  $x_1, \dots, x_{n-1}$ , alors

$$\Gamma(x_1, \dots, x_n) = \Gamma(x_1, \dots, x_{n-1}) \times \|x_n\|^2.$$

- Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $E$ ,  $(f_1, \dots, f_n)$  une base quelconque de  $F$  et  $x \in E$ . On note  $p$  la projection orthogonale sur  $F$ .

- Montrer que

$$\Gamma(f_1, \dots, f_n, x) = \Gamma(f_1, \dots, f_n) \times \|x - p(x)\|^2.$$

- En déduire que

$$d(x, F) = \sqrt{\frac{\Gamma(f_1, \dots, f_n, x)}{\Gamma(f_1, \dots, f_n)}}.$$

— Exercice 32 ●●○○ — Une caractérisation des projecteurs orthogonaux

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel.

- Montrer que, pour tous  $x, y \in E$ ,

$$x \perp y \iff (\forall t \in \mathbb{R}, \quad \|x + ty\| \geq \|x\|).$$

On se convaincra d'abord que le résultat est vrai sur une figure.

- Soit  $p$  un projecteur de  $E$ .

- Montrer que si  $p$  est un projecteur orthogonal, alors,

$$\forall x \in E, \quad \|p(x)\| \leq \|x\|.$$

- Montrer que la réciproque est vraie.

**Indications**

**Exercice 6. 3.** On pourra utiliser les résultats de l'exercice 3.

**Exercice 9. 1.** Appliquer le théorème des bornes atteintes à  $f$ .

2. Majorer  $a_{n+1}$  en fonction de  $a_n$  et  $a_{n+2}$ .

**Exercice 11. 1.** Il est temps de se remémorer la classification des sous-groupes additifs de  $\mathbb{R}$ . **2.b** On pourra s'intéresser à une matrice de passage.

**Exercice 15. 2.** Montrer que  $\{e_1, \dots, e_n\}^\perp = \{0_E\}$ , ou calculer  $\left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2$ , pour tout  $x \in E$ .

**Exercice 16.** Procéder par analyse-synthèse et exprimer le produit scalaire cherché via la base duale de  $\mathcal{B}$ .

**Exercice 18.** Il y a de la bilinéarité et de la linéarité dans l'air...

**Exercice 21. 1.** Si  $g \in F_1^\perp$  que dire de  $t \mapsto tg(t)$  ?

2. Si  $g \in F_2^\perp$ , montrer qu'une primitive de  $g$  est dans  $E^\perp$ .

**Exercice ??.** 1. Établir que, pour  $P \in \mathbb{R}[X]$ , si  $P(0) = P(1) = 0$ , alors  $\langle P', Q \rangle = -\langle P, Q' \rangle$ , puis en déduire que  $Q_j \in \mathbb{R}_{j-1}[X]^\perp$ , pour tout  $j \geq 1$ .

**Exercice 30.** Ramener  $d(x, \mathcal{H})$  à une distance  $d(\dots, H)$ .

**Éléments de réponses**

**Exercice 4. 2.**  $m = (b - a)^2$ .

**Exercice 5. 3.**  $\frac{\sqrt{1 - e^{-2}}}{2}$ .

**Exercice 9. 3.**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

**Exercice 11. 1.** Les  $L$ -groupes de  $\mathbb{R}$  sont les  $\alpha\mathbb{Z}$ , avec  $\alpha > 0$ .

**2.b** La condition est  $P_e' \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ .

**Exercice 12. 1.**  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1), \sqrt{\frac{2}{3}}(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)\right)$ . **2.**  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}} \text{Id}, \sqrt{6}|\cdot| - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ .

**Exercice 13. 2.**  $\mathbb{R}_1[X]^\perp = \text{Vect}(-5X^3 + 3X, -3X^1 + 1)$ .

**Exercice 16. 2.**  $((x, x'), y, y') \mapsto \frac{1}{9}(5xy - 4xy' - 4x'y + 5x'y')$ .

**Exercice 20. 3.**  $F^\perp$  est l'ensemble des matrices à diagonale nulle.

**Exercice 23. 2.**  $\mathcal{B} = (A, B)$  avec  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . **3.**  $B$ . **4.**  $d(J, \mathcal{F}) = \sqrt{2}$ .

**Exercice 24. 2.** Le projeté orthogonale de  $A$  sur  $F$  est  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  et  $d(A, F) = 1$ .

**Exercice 25.**  $x \mapsto -\frac{1}{2} \cos(2x)$ .

**Exercice 26. 1.**  $p(x, y, z) = \frac{1}{3}(2x - y + 2, -x + 2y + z, x + y + 2z)$ .

**2.**  $s(M) = M - \frac{2 \text{tr}(M)}{n} I_n$ . **4.**  $s(\sin) = \frac{6}{\pi} - \frac{6}{\pi^2} \text{Id} - \sin$ .

**3.**  $p(x, y, z, t) = \frac{1}{2}(x + y, x + y, z - t, t - z)$ .

**Exercice 27. 1.**  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ . **2.** Le projeté orthogonal de  $A$  sur  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  est la matrice  $H = \frac{1}{2}(A + A^\top)$  et

$$\inf_{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2 = d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2 = \|A - H\|^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_{i,j} - a_{j,i})^2.$$

**Exercice 29. 2.**  $G = \text{Vect}(g_1, g_2)$ , avec  $g_1 : x \mapsto e^x$  et  $g_2 : x \mapsto e^{-x}$ . On vérifie alors que  $G^\perp = F$  et la projection orthogonale sur  $G$  est

$$p : f \mapsto \frac{e f(1) - f(0)}{e^2 - 1} g_1 + \frac{f(0) - e^{-1} f(1)}{1 - e^{-2}} g_2.$$

**3.**  $f_0 : x \mapsto (b - a)x + a$  convient et  $E_{a,b}$  est le sous-espace affine de direction  $F$  passant par  $f_0$ . On a alors  $p(f_0) = \frac{e b - a}{e^2 - 1} g_1 + \frac{a - e^{-1} b}{1 - e^{-2}} g_2$  et

$$\inf_{f \in E_{a,b}} \int_0^1 (f^2 + f'^2) = d(f_0, F)^2 = \|p(f_0)\|^2 = \frac{(b e - a)^2}{e^2 - 1} + \frac{(a - b e^{-1})^2}{1 - e^{-2}}.$$

**Exercice 31. 1.a**  $G(x_1, \dots, x_n) = A^\top A$ .