32 Position et dispersion d'une variable aléatoire

Cahier de calcul : $\varnothing$. **Banque CCINP :** exercices 1, 2, 4 et 38.

Modélisations probabilistes

Exercice 1 ●○○○ — ☑ **Banque d'exercices CCINP 2025 (95)**

Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1. Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées. On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
   - **a.** Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
   - **b.** Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.
2. Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
   - **a.** Déterminer la loi de X.
   - **b.** Déterminer la loi de Y.

Exercice 2 ●●○○ — ☑ **Banque d'exercices CCINP 2025 (98)**

Un·e secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts. On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est $p \in]0,1[$. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X. Justifier.
2. La/Le secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle/il n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
   - **a.** Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{P}_{(X=i)}(Y = k)$.
   - **b.** Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.

     Indication : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité : $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.
   - **c.** Déterminer l'espérance et la variance de Z.

Exercice 3 ●●○○ — ☑ On tire au hasard un entier X entre 1 et n, puis de nouveau au hasard un entier Y entre 1 et X. Déterminer la loi et l'espérance de Y.

Exercice 4 ●●○○ — ☑ **Banque d'exercices CCINP 2025 (104)**

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3. On lance simultanément les n boules . Elles viennent se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments. Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules. On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1. Préciser les valeurs prises par X.
2. - **a.** Déterminer la probabilité $\mathrm{P}(X = 2)$.
   - **b.** Finir de déterminer la loi de probabilité de X.
3. - **a.** Calculer $\mathbf{E}(X)$.
   - **b.** Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{E}(X)$. Interpréter ce résultat.

Exercice 5 ●●○○ — ☑ **Mines-Ponts MP 2022** Soit $k, n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant k$.

1. Démontrer par un argument combinatoire l'égalité $\displaystyle\sum_{p=k}^{n} \binom{p}{k} = \binom{n+1}{k+1}$.
2. Une urne contient k boules blanches et $n - k$ noires. On tire successivement les n boules, sans remise. On note X la variable aléatoire donnant le numéro du tirage auquel la dernière boule blanche est tirée. Calculer $\mathbf{E}(X)$.

Exercice 6 ●●○○ — ☑ **Mines-Ponts MP 2022**

1. Par un argument de dénombrement, montrer que
$$\forall (n, a, b) \in \mathbb{N}^3, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}.$$
2. Deux joueurs A et B procèdent, chacun à leur tour, à une série de n lancers à pile ou face avec une pièce équilibrée. On note X la différence entre le nombre de piles obtenus par A et le nombre de piles obtenus par B. Déterminer la loi de X. Calculer $\mathbf{E}(X)$, $\mathbf{V}(X)$ et $\mathbf{E}(|X|)$.

Exercice 7 ●●○○ — ☑ Une urne contient des jetons numérotés de 1 à n. On tire au hasard N numéros dans l'urne, en remettant le numéro tiré à chaque tirage. On appelle X le plus grand des numéros tirés.

1. Déterminer $\mathrm{P}(X \leqslant k)$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, et en déduire la loi de X.
2. Démontrer que $\mathbf{E}(X) = n - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k-1}{n}\right)^N$. Quelle est la limite de $\mathbf{E}(X)/n$ lorsque n tend vers $+\infty$?
3. Quelle est la limite de $\mathbf{E}(X)$ lorsque N tend vers $+\infty$? Commenter.

Exercice 8 ●●○○

Un sac contient $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On tire au hasard une boule du sac et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Soit $k \in [\![1, 2n]\!]$. Un joueur a la possibilité d'effectuer deux tirages dans ce sac avec la stratégie suivante :
   - si le premier tirage donne un numéro au moins égal à k, il s'arrête ;
   - sinon, la boule tirée est remise dans le sac et il effectue un second tirage.

   On note Y la variable aléatoire égale au numéro tiré.

   a. Déterminer en fonction de k et de n la loi de Y.

   b. Déterminer l'espérance de Y en fonction de k et n.

   c. Comparer les espérances de X et de Y et montrer que celle de Y est maximale pour $k = n + 1$.

Exercice 9 ●●○○ Modèle d'urne d'Ehrenfest

Ce modèle d'urne illustre la détente d'un gaz. Deux compartiments identiques contiennent un même gaz, mais dans des quantités différentes. Ils sont reliés par un tuyau fermé au début de l'expérience. On ouvre le tuyau. Les échanges de molécules de gaz entre les deux compartiments sont modélisés par un échange de boules entre deux urnes. On répartit $2M$ boules numérotées de 1 à $2M$ dans deux urnes U et V. Cette répartition se fait de manière non précisée.

On effectue une succession de tirages d'un numéro dans $[\![1, 2M]\!]$, de façon uniforme. À chaque tirage, on change d'urne la boule portant précisément le numéro tiré. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n le nombre de boules dans l'urne U au bout de n tirages.

1. Soit $k \in X_{n+1}[\Omega]$. Exprimer la probabilité $P(X_{n+1} = k)$ en fonction des probabilités $P(X_n = k - 1)$ et $P(X_n = k + 1)$.
2. En déduire une expression de $\mathbf{E}(X_{n+1})$ en fonction de $\mathbf{E}(X_n)$.
3. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{E}(X_n)$. Commentaire ?

Exercice 10 ●○○○ Marche aléatoire

Un mobile se déplace de façon aléatoire sur un axe gradué. À l'instant 0, il est à l'origine et, à chaque instant entier, il se déplace d'une unité vers la droite (resp. gauche) avec la probabilité $p \in]0, 1[$ (resp. $q = 1 - p$). On note X_n son abscisse après n pas.

1. Soit D_n la variable aléatoire égale au nombre de pas vers la droite. Quelle est la loi de D_n ? Exprimer X_n en fonction de D_n.
2. En déduire l'espérance et la variance de X_n. Pour quelle valeur de p la variable X_n est-elle centrée ? Interpréter.

Exercice 11 ●●○○

Dans une urne contenant initialement a boules blanches et b boules noires, on effectue des tirages successifs d'une boule selon le protocole suivant : si l'on obtient à un rang quelconque une boule blanche, celle-ci est remise dans l'urne avant le tirage suivant, et si l'on obtient à un rang quelconque une boule noire, celle-ci est jetée et remplacée dans l'urne par une boule blanche avant le tirage suivant.

On note Z_k la variable aléatoire égale à 1 si le k^e tirage donne une boule noire et 0 sinon, et Y_k la variable aléatoire égale au nombre de boules noires restant dans l'urne après le k^e tirage.

1. **a.** Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(Z_k = 1) = \dfrac{1}{a+b}\,\mathbf{E}(Y_{k-1})$.

   b. En déduire que $(\mathbf{E}(Z_k))_{k\geqslant 1}$ est une suite géométrique et déterminer son expression en fonction de a, b et k.

   c. En déduire la probabilité que le k^e tirage amène une boule noire.
2. On note X_n le nombre aléatoire de boules noires obtenues au cours des n premiers tirages. Calculer l'espérance de X_n ainsi que sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 12 ●●○○

Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher. On y prélève une boule – chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée – on note sa couleur et on la remet dans l'urne avec c boules de la couleur de la boule tirée ($c \in \mathbb{N}^*$ fixé). On répète cette épreuve n fois, avec $n \geqslant 3$.
On considère les variables aléatoires $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ définie par :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si on obtient une boule blanche au } i\text{-ème tirage,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit alors, pour tout $p \in [\![2, n]\!]$, la variable aléatoire $Z_p = \sum\limits_{i=1}^{p} X_i$.

1. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2). En déduire la loi de X_2.
2. Déterminer la loi de probabilité de Z_2.
3. **a.** Déterminer, pour tout $p \in [\![2, n]\!]$, $Z_p[\Omega]$.

   b. Soit $p \in [\![2, n-1]\!]$.

   (i) Déterminer, pour tout $k \in Z_p[\Omega]$, $P_{(Z_p=k)}(X_{p+1} = 1)$.

   (ii) En déduire que
   $$P(X_{p+1} = 1) = \frac{1 + c\,\mathbf{E}(Z_p)}{2 + pc}.$$

   c. Montrer par récurrence forte que
   $$\forall p \in [\![1, n]\!], \quad P(X_p = 1) = P(X_p = 0) = \frac{1}{2}.$$

Exercice 13 ●●○○ — Mines-Ponts MP 2022

On considère N personnes ($N \geqslant 1$) qui montent dans un ascenseur au rez-de-chaussée d'un immeuble de m étages ($m \geqslant 1$) et qui descendent à un étage au hasard (le rez-de-chaussée n'est pas compté comme un étage). On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'arrêts de l'ascenseur. On note $Y_{i,j}$ la variable de Bernoulli qui vaut 1 si le passager j descend à l'étage i et X_i la variable de Bernoulli qui vaut 1 si l'ascenseur s'arrête à l'étage i.

1. Déterminer les lois des variables aléatoires $Y_{i,j}$ et X_i.
2. Calculer $\mathbf{E}(X)$.
3. Exprimer la loi de X en utilisant le nombre $s_{n,p}$ de surjections d'un ensemble à p éléments sur un ensemble à n éléments.

Exercice 14 ●●○○

Soit F_n l'ensemble des applications de $E = [\![1\,,n]\!]$ dans lui-même (avec $n \geqslant 3$).
Soit X la variable aléatoire qui à g dans F_n associe le cardinal de $g[E]$. Pour $i \in E$, on introduit X_i l'indicatrice de l'événement « l'entier i est dans $g[E]$ ».

1. Donner la loi de X_i, et en déduire $\mathbf{E}(X)$.
2. Soit un réel α. Démontrer que lorsque n tend vers $+\infty$,
$$\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{\alpha}\left(1-\frac{\alpha^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
3. En déduire la limite de $\mathbf{E}(X)/n$ lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Expliciter la loi du couple (X_i, X_j), pour $(i,j) \in E^2$, puis montrer que
$$\operatorname{Cov}(X_i, X_j) = \left(1-\frac{2}{n}\right)^n - \left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}.$$
5. Calculer la variance de X et montrer que $\dfrac{1}{n}\mathbf{V}(X) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\mathrm{e}}\left(1-\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right)$.

Exercice 15 ●●○○

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On en tire $k \geqslant 2$ une à une et sans remise. On note X_i la variable aléatoire « numéro porté par la i^{e} boule ». Déterminer la loi de X_i et la covariance $\operatorname{Cov}(X_i, X_j)$, pour $i \neq j$.

Exercice 16 ●●○○

Une expérience aléatoire consiste à choisir au hasard un élément ω de $\mathfrak{S}_n$.

1. Soit $(i,j) \in [\![1\,,n]\!]^2$. Déterminer la probabilité de l'ensemble $A_{ij} = \{\omega \mid \omega(i) = j\}$.
2. Soit des nombres réels $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$. On définit la variable aléatoire S par $S(\omega) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_{\omega(k)}$, pour tout $\omega \in \Omega$. Déterminer l'espérance de S.

Exercice 17 ●●●○ — X MP 2022

Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{d-1})$ une liste de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Bernoulli de paramètre 1/2. On note p_d la probabilité pour que le polynôme $X^d + \displaystyle\sum_{i=1}^{d-1} \varepsilon_i X^i + 1$ possède une racine rationnelle . Montrer que $p_d \underset{d\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{2}{d\pi}}$.

Exercice 18 ●●●○

Soit σ une permutation aléatoire de $[\![1\,,n]\!]$, où $n \geqslant 2$.

1. On note F le nombre de points fixes de la permutation σ et, pour tout $i \in [\![1\,,n]\!]$, E_i l'événement $(\sigma(i) = i)$.
   - **a.** Calculer $\mathrm{P}(E_i)$ et $\mathrm{P}(E_i \cap E_j)$ pour tous $i, j \in [\![1\,,n]\!]$.
   - **b.** Exprimer F en fonction des événements E_i. En déduire l'espérance de F.
   - **c.** Calculer $\operatorname{Cov}\big(\mathbb{1}_{E_i}, \mathbb{1}_{E_j}\big)$ pour tous $i, j \in [\![1\,,n]\!]$. En déduire la variance de F.
   - **d.** Montrer que $\mathrm{P}(F \geqslant 4) \leqslant \frac{1}{9}$.
2. On note L la longueur du cycle dans lequel 1 apparaît dans la décomposition de σ en produit de cycles disjoints. Montrer que L suit la loi uniforme sur $[\![1\,,n]\!]$.
3. Dans cette question, n n'est plus fixé et on se donne pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une permutation aléatoire σ_n de $[\![1\,,n]\!]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note alors N_n le nombre de cycles de la décomposition de σ_n en produit de cycles disjoints et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $c_{n,k}$ le nombre de permutations de $[\![1\,,n]\!]$ dont la décomposition en produit de cycles disjoints contient exactement k cycles.
   - **a.** Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$,
   $$c_{n+1,k} = c_{n,k-1} + n c_{n,k}.$$
   - **b.** En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$\mathbf{E}(N_{n+1}) = \mathbf{E}(N_n) + \frac{1}{n+1}.$$
   - **c.** En déduire un équivalent simple de $\mathbf{E}(N_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 19 ●●●○ — X MP 2022

Quel est le nombre moyen de points fixes d'une permutation de $\{1, ..., n\}$?

Exercice 20 ●●●○ — X MP 2022

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et σ_n une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\mathfrak{S}_n$.

1. Soit L_n la longueur du cycle de σ_n contenant 1. Déterminer l'espérance de L_n.
2. Quelle est la probabilité que 1 et 2 soient dans un même cycle de σ_n ?
3. On note c_n le nombre de cycles de σ_n. Montrer que $\mathbf{E}(c_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

Exercice 21 ●●●○ — Mines-Ponts MP 2022 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On munit $\mathfrak{S}_n$ de la probabilité uniforme et l'on note $X(\sigma)$ le nombre de point fixes d'une permutation σ. Calculer $\mathbf{E}(X)$.
2. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note d_k le nombre de permutations sans point fixe de $[\![1, k]\!]$. Montrer que $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$.
3. En déduire une expression de d_n.
Indication : on pourra utiliser la formule d'inversion de Pascal (cf. TD1).
4. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, déterminer le nombre de permutations de $[\![1, n]\!]$ ayant exactement k points fixes.

Manipulation formelle de probabilités et de variables aléatoires

Exercice 22 ●○○○ — Espérance d'une variable aléatoire à valeurs entières
Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $[\![1, n]\!]$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(X \geqslant k).$$

Exercice 23 ●●○○ — Indicatrice d'événement
Soit (Ω, P) un espace probabilisé.

1. Soit $(A_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une famille de n événements. Interpréter la variable aléatoire $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k}$. Quel est le nombre moyen d'événements réalisés ?
2. Parmi les $2n$ personnes formant n couples, m personnes décèdent. En moyenne combien de couples ont survécu ?

Exercice 24 ●●○○ — Soit A et B deux événements pour lesquels

$$\mathrm{P}(A) = \frac{1}{2}, \quad \mathrm{P}(B) = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}.$$

Déterminer la loi, l'espérance et l'écart-type de $\mathbb{1}_A + 2\mathbb{1}_B$.

Exercice 25 ●○○○ — Loi uniforme sur $[\![m, n]\!]$
Soit $m, n \in \mathbb{Z}$ deux entiers pour lesquels $m \leqslant n$ et U une variable uniforme sur $[\![m, n]\!]$.

1. Calculer l'espérance et la variance de U dans le cas où $m = 1$.
2. En déduire l'espérance et la variance de U dans le cas général.

Exercice 26 ●●○○ — Moments factoriels
Soit X est une variable aléatoire réelles finie. On appelle *moment factoriel d'ordre k* le réel $\mu_k = \mathbf{E}(X(X-1)\cdots(X-k+1))$. Montrer que

1. si X suit la loi uniforme $\mathscr{U}([\![1, n]\!])$ alors $\mu_k = \dfrac{k!}{n}\dbinom{n+1}{k+1}$, pour $k \in [\![1, n]\!]$;
2. si X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ alors $\mu_k = \dfrac{n!}{(n-k)!}p^k$, pour $k \in [\![1, n]\!]$.

Exercice 27 ●○○○ — Premier succès d'une loi binomiale
On réalise n expériences de type succès/échecs indépendantes et de même probabilité de succès $p \in \,]0, 1[$. On note X le rang du premier succès, avec $(X = 0)$ en cas d'absence de succès. Déterminer la loi de X et calculer son espérance.

Exercice 28 ●●○○ —
La variable aléatoire X suit la loi $\mathscr{B}(n, p)$, avec $p \in \,]0, 1[$.

1. Calculer la probabilité des événements (X pair) et (X impair).
2. On suppose n impair et on définit $Y = \lfloor X/2 \rfloor$ (partie entière de $X/2$). Quelle est la loi de Y ? Calculer son espérance.

Exercice 29 ●●○○ —
Soit X une variable aléatoire réelle finie de loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$, où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \,]0, 1[$.

1. Montrer que $Y = \dfrac{1}{1+X}$ est une variable aléatoire réelle finie et calculer $\mathbf{E}(Y)$.
2. Soit $z \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $Z = z^X$ est une variable aléatoire réelle finie et calculer son espérance et sa variance.

Exercice 30 ●○○○ —
Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $[\![0, n]\!]$ et telle que

$$\forall k \in X[\Omega] \quad \mathrm{P}(X = k) = ak + b$$

avec a et b deux paramètres réels. Est-il possible de trouver a et b pour que X soit une variable centrée réduite ?

Exercice 31 ●●○○ — Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère une variable aléatoire réelle discrète X admettant des moments jusqu'à l'ordre 4 et vérifiant

$$\mathbf{E}(X) = \alpha \quad \text{et} \quad \mathbf{E}\big(X^2\big) = \mathbf{E}\big(X^4\big) = 1.$$

1. Montrer que α est nécessairement compris entre -1 et 1.
2. Trouver la loi de X.

Exercice 32 ●●○○ — ☑ On pose, pour tout $(i,j) \in [\![1\,,n]\!]^2, p_{i,j} = \lambda ij$.

1. Déterminer λ pour que la famille de réels $(p_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ définisse une loi conjointe.

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $[\![1\,,n]\!]^2$ admettant cette loi conjointe.

2. Déterminer les lois marginales de X et de Y et calculer leurs espérances.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Donner la valeur de $\mathrm{Cov}(X,Y)$ et en déduire $\mathbf{E}(XY)$.
5. On pose $Z = X + Y$. Déterminer la loi de Z.

Exercice 33 ●●○○ — **Indépendance de deux variables de Bernoulli**

Soit X et Y deux variables de Bernoulli sur un espace probabilisé fini (Ω, P).

1. Montrer que $\mathbf{E}(XY) = \mathrm{P}((X=1)\cap(Y=1))$.
2. Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si leur covariance est nulle.

Exercice 34 ●●○○ — ☑ Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé fini (Ω, P), mutuellement indépendantes et suivant toutes deux la loi uniforme sur $[\![1\,,n]\!]$. Soit a dans $[\![1\,,n]\!]$, on définit la variable aléatoire Y par

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Y(\omega) = \begin{cases} X_1(\omega) & \text{si } X_2(\omega) \leqslant a \\ X_2(\omega) & \text{si } X_2(\omega) > a. \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de Y et son espérance. Comparer $\mathbf{E}(Y)$ et $\mathbf{E}(X_1)$.
2. Déterminer a telle que l'espérance de Y soit maximale.

Exercice 35 ●○○○ — Soit X et Y deux variables de Bernoulli indépendantes de paramètre $1/2$ définies sur un même espace probabilisé fini.
Montrer que les variables aléatoires $S = X+Y$ et $D = X-Y$ ne sont pas indépendantes, mais que pourtant $\mathbf{E}(SD) = \mathbf{E}(S)\,\mathbf{E}(D)$.

Exercice 36 ●●○○ — 💡☑ **Minimum et maximum d'un couple**

Soit U et V deux variables indépendantes uniformes sur $[\![1\,,n]\!]$ définies sur un même espace probabilisé fini. On note m leur minimum et M leur maximum.

1. **a.** Déterminer la loi de m.
   b. En déduire l'espérance de m.
2. Les variables m et M sont-elles indépendantes ?
3. Calculer l'espérance de M sans déterminer sa loi.
4. Déterminer la loi du couple (m, M).

Exercice 37 ●●○○ —

Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles deux à deux décorrélées, d'écarts-types strictement positifs et définies sur un espace probabilisé fini (Ω, P). On pose $X_0 = 1$.

1. Simplifier $\mathbf{V}\left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k X_k\right)$, pour tous $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.
2. En déduire que la famille $(X_0, \ldots, X_n)$ est libre dans $\mathbb{R}^\Omega$, puis que $|\Omega| \geqslant n+1$.

Inégalités probabilistes

Exercice 38 ●○○○ — ☑ **Banque d'exercices CCINP 2025 (99)**

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$. Prouver que
$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad \mathrm{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbf{E}(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \frac{\mathbf{V}(Y_1)}{na^2}.$$
3. *Application.* On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.
   À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0,35$ et $0,45$?
   Indication : considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du $i^{\text{ième}}$ tirage.

Exercice 39 ●○○○ — ☑

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance une pièce de monnaie supposée équilibrée n fois de suite.

1. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, trouver une condition suffisante sur l'entier n pour que la fréquence de « Face » obtenus soit strictement comprise entre $0,4$ et $0,6$ avec une probabilité supérieure ou égale à $0,95$.
2. Après $1\,000$ lancers, on observe une proportion de « Pile » de $0,65$. La pièce est-elle vraiment honnête ?

Exercice 40 ●●●○ — 💡☑ **Mines-Ponts MP 2017**

Soit $M = (R_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice aléatoire dont les coefficients sont des variables indépendantes de Rademacher. On pose $D = \det(M)$.

1. Calculer l'espérance et la variance de D.
2. En déduire $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}\left(|D| \geqslant \sqrt{(n+1)!}\right)$.

Exercice 41 ●●○○ Soit $a, b \in \mathbb{R}$ deux réels pour lesquels $0 < a \leqslant b$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $[a\,,b]$.

1. Montrer que $\dfrac{1}{X} \leqslant \dfrac{a+b-X}{ab}$.
2. En déduire que $\mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}\left(\dfrac{1}{X}\right) \leqslant \dfrac{(a+b)^2}{4ab}$.

Exercice 42 ●●○○ Soit $a, b \in \mathbb{R}$ deux réels pour lesquels $a \leqslant b$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $[a\,,b]$.

1. **a.** En factorisant $\mathbf{V}(X) + \mathbf{E}((b-X)(X-a))$, montrer que
$$\mathbf{V}(X) \leqslant (b - \mathbf{E}(X))(\mathbf{E}(X) - a).$$
   b. En déduire que $\mathbf{V}(X) \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{4}$.
2. Calculer la variance de $(b-a)X+a$ dans le cas où X suit la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(1/2)$. Qu'en déduit-on ?

Exercice 43 ●●○○ Soit I un intervalle, X une variable aléatoire à valeurs dans I et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction concave.

1. **a.** Montrer que $\mathbf{E}(X) \in I$.
   b. Montrer l'inégalité de Jensen $\quad \mathbf{E}(f(X)) \leqslant f(\mathbf{E}(X))$.
2. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles strictement positives de même loi. Montrer que $\mathbf{E}\left(\dfrac{X}{Y}\right) \geqslant 1$.

Exercice 44 ●○○○ Soit X une variable aléatoire réelle centrée. Montrer que $\mathbf{E}(|X|) \leqslant \sqrt{\mathbf{V}(X)}$.

Exercice 45 ●●○○ Une inégalité de concentration
Soit X une variable aléatoire centrée à valeurs dans $[-1\,,1]$ d'écart-type σ.

1. Montrer que, pour tous $t \geqslant 0$ et $\alpha \geqslant 0$, $\mathrm{P}(X \geqslant \alpha) \leqslant \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathbf{E}\big(\mathrm{e}^{tX}\big)$.
2. **a.** Déterminer le minimum sur $[-1\,,1]$ de la fonction $u \longmapsto \big(1+u+u^2\big)\,\mathrm{e}^{-u}$.
   b. En déduire que $\mathbf{E}\big(\mathrm{e}^{tX}\big) \leqslant 1 + \sigma^2 t^2 \leqslant \mathrm{e}^{\sigma^2 t^2}$, pour tout $t \in [0\,,1]$.
3. En déduire que $\mathrm{P}(|X| \geqslant \lambda\sigma) \leqslant 2\,\mathrm{e}^{-\lambda^2/4}$, pour tout $\lambda \in [0\,,2\sigma]$.

Exercice 46 ●●○○ Inégalité de Cantelli Soit X une variable aléatoire réelle admettant une espérance m et une variance σ^2. On fixe $\varepsilon > 0$.

1. Calculer $\mathbf{E}\big((X - m + \lambda)^2\big)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que, pour tout $\lambda > 0$, on a $\mathrm{P}(X - m \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{\sigma^2 + \lambda^2}{(\varepsilon + \lambda)^2}$.
3. En déduire que $\mathrm{P}(X - m \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 + \varepsilon^2}$, puis l'*inégalité de Cantelli*
$$\mathrm{P}(|X - m| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{2\sigma^2}{\sigma^2 + \varepsilon^2}.$$
et la comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 47 ●●●○ Inégalité maximale de Kolmogorov
Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles centrées indépendantes définies sur un même espace probabilisé fini. Soit $x > 0$.

On pose $\sigma_k = \sigma(X_k)$ et $S_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} X_i$, pour tout $k \in [\![1\,,n]\!]$, ainsi que $\sigma = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}$.

1. Montrer que $\mathrm{P}(|S_k| \geqslant x) \leqslant \frac{\sigma^2}{x^2}$ pour tout $k \in [\![1\,,n]\!]$.

On pose $A_k = (|S_k| \geqslant x) \cap \bigcap_{1 \leqslant i < k} (|S_i| < x)$, pour tout $k \in [\![1\,,n]\!]$.

2. Exprimer l'événement $(\max\{|S_1|, \ldots, |S_n|\} \geqslant x)$ en fonction des A_i.
3. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}\big(\mathbb{1}_{A_k} S_n^2\big) \leqslant \sigma^2$.
4. Montrer que, pour tout $k \in [\![1\,,n]\!]$, $\quad \mathbf{E}\big(\mathbb{1}_{A_k} S_k^2\big) \leqslant \mathbf{E}\big(\mathbb{1}_{A_k} S_n^2\big)$.
5. En déduire l'*inégalité maximale de Kolmogorov*
$$\mathrm{P}(\max\{|S_1|, \ldots, |S_n|\} \geqslant x) \leqslant \frac{\sigma^2}{x^2}.$$

Indications

Exercice 17. Commencer par montrer que -1 est la seule racine rationnelle éventuelle, puis distinguer deux cas selon la parité de d.

Exercice 19. Cf. exercice 18 question **1**.

Exercice 20. **1.** Montrer que $L_n \sim \mathscr{U}(\llbracket 1\,,n \rrbracket)$. **3.** Cf. exercice 18 question **3**.

Exercice 21. Cf. exercice 18 question **1**.

Exercice 36. **1.a** Commencer par déterminer $\mathrm{P}(m \geqslant k)$.

Exercice 40. **1.** Utiliser la formule de Leibniz. **2.** Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 45. **1.** Appliquer l'inégalité de Markov à une variable aléatoire bien choisie.
3. S'intéresser aussi à $-X$.

Éléments de réponses

Exercice 1. **1.a** $X \sim \mathscr{B}(5, 1/5)$, $\mathbf{E}(X) = 1$ et $\mathbf{V}(X) = 4/5$. **1.b** $Y = 5X - 15$, $\mathbf{E}(Y) = -10$ et $\mathbf{V}(Y) = 20$. **2.a** $\mathrm{P}(X = k) = \dfrac{\binom{2}{k}\binom{8}{5-k}}{\binom{10}{5}}$ pour $k \in \{0, 1, 2\}$. **2.b** $Y = 5X - 15$.

Exercice 2. **1.** $X \sim \mathscr{B}(n, p)$. **2.a** $\mathrm{P}_{(X=i)}(Y = k) = \begin{cases} \binom{n-i}{k} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n-i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
2.b $Z \sim \mathscr{B}(n, p(2-p))$. **2.c** $\mathbf{E}(Z) = np(2-p)$ et $\mathbf{V}(Z) = np(2-p)(p-1)^2$.

Exercice 3. $Y[\Omega] = \llbracket 1\,,n \rrbracket$, $\quad \mathrm{P}(Y = k) = \displaystyle\sum_{j=k}^{n} \frac{1}{jn} \quad$ et $\quad \mathbf{E}(Y) = \dfrac{n+3}{4}$.

Exercice 4. **1.** $\{0, 1, 2\}$. **2.a** $(1/3)^{n-1}$. **3.a** $\mathbf{E}(X) = 3(2/3)^n$. **3.b** 0.
2.b $\mathrm{P}(X = 1) = (1/3)^{n-1}(2^n - 2)$ et $\mathrm{P}(X = 0) = 1 - (1/3)^{n-1}(2^n - 1)$.

Exercice 5. **2.** $\mathrm{P}(X = j) = \dfrac{\binom{j-1}{k-1}}{\binom{n}{k}}$ pour $j \in \llbracket k\,,n \rrbracket$, et $\mathbf{E}(X) = \dfrac{k(n+1)}{k+1}$.

Exercice 6. **2.** $\mathrm{P}(X = k) = \binom{2n}{n-k}/4^n$, pour $k \in \llbracket -n\,,n \rrbracket$,

$$\mathbf{E}(X) = 0, \quad \mathbf{V}(X) = 2\,\mathbf{V}(X_A) = \frac{n}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{E}(|X|) = \frac{2}{4^n}\sum_{k=1}^{n} k\binom{2n}{n-k}.$$

Exercice 7. **1.** $\mathrm{P}(X \leqslant k) = \left(\dfrac{k}{n}\right)^N$. **2.** $\mathrm{P}(X = k) = \left(\dfrac{k}{n}\right)^N - \left(\dfrac{k-1}{n}\right)^N$.

3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbf{E}(X)}{n} = \frac{N}{N+1}$. **4.** $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \mathbf{E}(X) = n$.

Exercice 8. **1.** $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1\,,2n \rrbracket)$. **2.a.** $Y[\Omega] = \llbracket 1\,,2n \rrbracket$ et

$$\mathrm{P}(Y = j) = \begin{cases} \dfrac{k-1}{4n^2} & \text{si } j < k \\ \dfrac{2n-k+1}{4n^2} & \text{si } j \geqslant k. \end{cases}$$

2.b. $\mathbf{E}(Y) = \dfrac{2n+1}{2} + \dfrac{(k-1)(2n-k+1)}{4n}$. **2.c.** $\mathbf{E}(Y) \geqslant \mathbf{E}(X)$.

Exercice 9. **1.** $\mathrm{P}(X_{n+1} = k) = \dfrac{k+1}{2M}\mathrm{P}(X_n = k+1) + \dfrac{2M+1-k}{2M}\mathrm{P}(X_n = k-1)$.
2. $\mathbf{E}(X_{n+1}) = \dfrac{2M-2}{2M}\,\mathbf{E}(X_n) + 1$. **3.** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}(X_n) = M$.

Exercice 10. **1.** $D_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1/2)$ et $X_n = 2D_n - n$.
2. $\mathbf{E}(X_n) = n(2p-1)$ et $\mathbf{V}(X_n) = 4np(1-p)$.

Exercice 11. **1.b.** $\mathbf{E}(Z_k) = \dfrac{b}{a+b}\left(\dfrac{a+b-1}{a+b}\right)^{k-1}$. **1.c.** $\mathrm{P}(Z_k = 1) = \mathbf{E}(Z_k)$.

2. $\mathbf{E}(X_n) = b\left(1 - \left(\dfrac{a+b-1}{a+b}\right)^n\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$.

Exercice 12. **1.**

X_1/X_2	0	1
0	$\frac{1+c}{4+2c}$	$\frac{1}{4+2c}$
1	$\frac{1}{4+2c}$	$\frac{1+c}{4+2c}$

et $\quad \mathrm{P}(X_2 = 0) = \mathrm{P}(X_2 = 1) = \dfrac{1}{2}$.

2. $\mathrm{P}(Z_2 = 0) = \mathrm{P}(Z_2 = 2) = \frac{1+c}{4+2c}$ et $\mathrm{P}(Z_2 = 1) = \frac{2}{4+2c}$. **3.a** $Z_p[\Omega] = \llbracket 0\,,p \rrbracket$.
3.b.(i) $\mathrm{P}_{(Z_p=k)}(X_{p+1} = 1) = \frac{1+kc}{2+pc}$.

Exercice 13. **1.** $Y_{i,j} \sim \mathscr{B}(1/m)$ et $X_i \sim \mathscr{B}\Big(1 - \big(1 - \frac{1}{m}\big)^N\Big)$. **2.** $\mathbf{E}(X) = m\Big(1 - \big(1 - \frac{1}{m}\big)^N\Big)$.
3. $\mathrm{P}(X = k) = \binom{m}{k} s_{N,k}/m^N$.

Exercice 14. **1.** $X_i \sim \mathscr{B}\big(1 - \big(1 - \frac{1}{n}\big)^n\big)$ et $\mathbf{E}(X) = n\big(1 - \big(1 - \frac{1}{n}\big)^n\big)$. **3.** $1 - \mathrm{e}^{-1}$.
4. $\mathrm{P}((X_i = 0) \cap (X_j = 0)) = \big(1 - \frac{2}{n}\big)^n$, $\mathrm{P}((X_i = 1) \cap (X_j = 0)) = \big(1 - \frac{1}{n}\big)^n - \big(1 - \frac{2}{n}\big)^n$ et $\mathrm{P}((X_i = 0) \cap (X_j = 0)) = 1 - 2\big(1 - \frac{1}{n}\big)^n + \big(1 - \frac{2}{n}\big)^n$.
5. $\mathbf{V}(X) = n\big(1 - \frac{1}{n}\big)^n + n(n-1)\big(1 - \frac{2}{n}\big)^n - n^2\big(1 - \frac{1}{n}\big)^{2n}$.

Exercice 15. $\mathrm{P}((X_i = x) \cap (X_j = y)) = \dfrac{1}{n(n-1)}$ pour $x \neq y$ et $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = -\dfrac{n+1}{12}$.

Exercice 16. **1.** $\mathrm{P}(A_{i,j}) = \dfrac{1}{n}$. **2.** $\mathbf{E}(S) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Exercice 18. **1.a** $\mathrm{P}(E_i) = \dfrac{1}{n}$ et $\mathrm{P}(E_i \cap E_j) = \dfrac{1}{n(n-1)}$ pour $i \neq j$.

1.b $F = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{E_i}$ et $\mathbf{E}(F) = 1$. **1.c** $\mathrm{Cov}(E_i, E_j) = \dfrac{1}{n^2(n-1)}$ pour $i \neq j$, et $\mathbf{V}(F) = 1$.
3.c $\mathbf{E}(N_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

Exercice 19. Le nombre moyen de points fixes d'une permutation de $\{1, \ldots, n\}$ est 1.

Exercice 20. **1.** $\mathbf{E}(L_n) = \dfrac{n+1}{2}$. **2.** $\dfrac{1}{2}$.

Exercice 21. **1.** $\mathbf{E}(X) = 1$. **3.** $d_n = n!\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$. **4.** $\binom{n}{k} d_{n-k}$.

Exercice 23. **2.** A_i : « le couple i survit », $\mathrm{P}(A_i) = \dfrac{\binom{2n-2}{m}}{\binom{2n}{m}} = \left(1 - \dfrac{m}{2n}\right)\left(1 - \dfrac{m}{2n-1}\right)$.

Le nombre moyen de couple ayant survécu est $n \times \left(1 - \dfrac{m}{2n}\right)\left(1 - \dfrac{m}{2n-1}\right)$.

Exercice 24. Soit $X = \mathbb{1}_A + 2\mathbb{1}_B$.

k	0	1	2	3
$\mathrm{P}(X=k)$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$

$\mathbf{E}(X) = 7/6$ et $\sigma(X) = \sqrt{17}/6$.

Exercice 25. **1.** $\mathbf{E}(X) = \frac{n+1}{2}$ et $\mathbf{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$. **2.** $\mathbf{E}(X) = \frac{a+b}{2}$ et $\mathbf{V}(X) = \frac{(b-a+1)^2-1}{12}$.

Exercice 27. $\mathrm{P}(X=0) = (1-p)^n$, $\mathrm{P}(X=k) = (1-p)^{k-1}p$ et $\mathbf{E}(X) = \dfrac{1-(np+1)(1-p)^n}{p}$.

Exercice 28. **1.** $\mathrm{P}(X \text{ pair}) = \dfrac{1+(1-2p)^n}{2}$ et $\mathrm{P}(X \text{ impair}) = \dfrac{1-(1-2p)^n}{2}$.

2. $\mathrm{P}(Y=k) = \binom{n}{2k}p^{2k}(1-p)^{n-2k} + \binom{n}{2k+1}p^{2k+1}(1-p)^{n-2k-1}$

et $\mathbf{E}(Y) = \dfrac{np}{2} - \dfrac{1-(1-2p)^n}{4}$.

Exercice 29. **1.** $\mathbf{E}(Y) = \dfrac{1-(1-p)^{n+1}}{p(n+1)}$.

2. $\mathbf{E}(Z) = (1+p(z-1))^n$ et $\mathbf{V}(Z) = \big(1+(z^2-1)p\big)^n - (1+p(z-1))^{2n}$.

Exercice 30. Non.

Exercice 31. **2.** $X \sim \mathscr{B}(\frac{1+\alpha}{2})$.

Exercice 32. **1.** $\lambda = \frac{4}{n^2(n+1)^2}$. **3.** Oui. **4.** $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ et $\mathbf{E}(XY) = \left(\frac{2n+1}{3}\right)^2$.

2. $\mathrm{P}(X=k) = \mathrm{P}(Y=k) = \frac{2k}{n(n+1)}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$ et $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y) = \frac{2n+1}{3}$.

5. $\mathrm{P}(Z=z) = \begin{cases} \lambda k(k+1)(k-1)/6 & \text{si } 1 \leqslant k \leqslant n+1 \\ \lambda(2n-k-1)(k^2+2kn+k-2n-2n^2)/6 & \text{si } n+1 \leqslant k \leqslant 2n. \end{cases}$

Exercice 34. **1.** $\mathrm{P}(Y=k) = \begin{cases} \frac{n+a}{n^2} & \text{si } k > a \\ \frac{a}{n^2} & \text{si } k \leqslant a, \end{cases}$ $\mathbf{E}(Y) = \dfrac{n+1}{2} + \dfrac{a(n-a)}{2n} \geqslant \mathbf{E}(X_1) = \dfrac{n+1}{2}$.

2. $a = \begin{cases} \lfloor \frac{n}{2} \rfloor & \text{si } n \text{ pair} \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$

Exercice 36. **1.a** $\mathrm{P}(m=k) = \dfrac{2n-2k+1}{n^2}$, pour $k \in [\![1\,,n]\!]$. **1.b** $\mathbf{E}(m) = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n}$.

2. Non. **3.** $\mathbf{E}(M) = \dfrac{(n+1)(4n-1)}{6n}$. **4.** $\mathrm{P}(m=i, M=j) = \begin{cases} 2/n^2 & \text{si } i<j \\ 1/n^2 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Exercice 38. **3.** $n \geqslant 1920$.

Exercice 39. **1.** $n \geqslant 500$. **2.** Sûrement non.

Exercice 40. **1.** $\mathbf{E}(D) = 0$ et $\mathbf{V}(D) = n!$. **2.** 0.