

# Probabilités sur un univers fini, variables aléatoires et lois

Cahier de calcul :  $\emptyset$ .

Banque CCINP : exercices 13, 15 et 17.

## Événements et probabilité

### — Exercice 1 ●○○○ — ☑

Soit  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une famille d'événements d'un univers  $\Omega$ . Décrire à l'aide des opérations ou relations ensemblistes usuelles les situations ou les événements suivants.

1. Tous les événements  $A_i$  se réalisent.
2. L'un au moins des  $A_i$  se réalisent.
3. L'un seulement des événements  $A_1$  et  $A_2$  est réalisé.
4. À chaque fois que  $A_1$  est réalisé,  $A_2$  l'est aussi.
5.  $A_1$  et  $A_2$  ne se produisent jamais ensemble.
6.  $A_1$  ou  $A_2$  se produisent toujours.
7. Tous les événements  $A_i$  se réalisent à partir d'un certain rang.
8. Une infinité de  $A_i$  se réalisent.

### — Exercice 2 ●●○○ — ? Sous-additivité finie

Soit  $(\Omega, \mathcal{P})$  un espace probabilisé fini.

1. a. Établir que, pour tous  $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ ,  $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$ .
- b. Plus généralement, démontrer que

$$\forall (A_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathcal{P}(\Omega)^n, \quad P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \sum_{k=1}^n P(A_k) \quad (\text{sous-additivité finie de } P).$$

2. *Inégalité de Bonferroni.* Soit  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  une famille de  $n$  événements de  $(\Omega, \mathcal{P})$ . Démontrer l'inégalité

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \geq \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j).$$

3. *Inégalité de Kounias.* Soit  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  une famille de  $n$  événements de  $(\Omega, \mathcal{P})$ . Démontrer l'inégalité

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \min_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} \left\{ \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i \neq k} P(A_i \cap A_k) \right\}.$$

— Exercice 3 ●○○○ — ☑ Soit l'univers  $\Omega = \llbracket 1, 2n \rrbracket$ . Peut-on trouver deux réels  $a$  et  $b$  tels que

$$\forall k \in \Omega, \quad P(\{k\}) = ak + b$$

définisse une distribution de probabilité et que  $P(\llbracket 1, n \rrbracket) = \frac{1}{4}$  ?

— Exercice 4 ●○○○ — Soient  $\Omega$  un univers fini et  $P_1$  et  $P_2$  deux probabilités sur  $\Omega$ . Montrer que  $P = \mu P_1 + (1 - \mu)P_2$ , avec  $\mu \in [0, 1]$ , est une probabilité sur  $\Omega$ .

### — Exercice 5 ●○○○ — ☑

On lance 5 dés à 6 faces non pipés. Déterminer les probabilités

1. d'obtenir 5 numéros différents ;
2. d'obtenir au moins un multiple de 3 ;
3. d'obtenir au moins deux faces identiques ;
4. que le produit des chiffres obtenus soit pair ;
5. que la somme des chiffres obtenus soit paire ;
6. d'avoir au moins un multiple de 3 et au moins un numéro pair.

### — Exercice 6 ●○○○ — ☑ Paradoxe du Chevalier de Méré

Est-il plus probable d'obtenir au moins une fois un 6 en quatre jets de dé que d'obtenir au moins une fois un double 6 en vingt-quatre jets de deux dés ?

### — Exercice 7 ●●○○ — ☑

Expliquer pourquoi, lorsque l'on jette trois dés, on obtient plus souvent la somme 10 que la somme 9, alors que ces deux sommes sont obtenues de six façons différentes chacune.

— Exercice 8 ●●○○ — ☑ Dans un tiroir, 8 paires de chaussettes distinctes sont rangées. On prend simultanément 4 chaussettes au hasard.

1. Quelle est la probabilité d'avoir reconstitué deux paires ?
2. Au moins une paire ?
3. Exactement une paire ?

### — Exercice 9 ●●○○ — ☑ Mines-Ponts MP 2022

Soit  $n \geq 2$  et  $E$  un ensemble fini de cardinal  $n$ .

1. Dénombrer les couples  $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$  tels que  $X \subset Y$ .
2. Une urne contient  $n$  boules indiscernables. On en tire aléatoirement un sous-ensemble (avec probabilité uniforme), puis on remet les boules tirées dans l'urne et on répète l'opération. Calculer la probabilité pour qu'aucune boule n'ait été tirée deux fois.

### — Exercice 10 ●○○○ — Un jeu non transitif

Trois joueurs  $A$ ,  $B$  et  $C$  piochent un numéro, chacun dans son urne. L'urne du joueur  $A$  contient les numéros  $\{2, 4, 9\}$ , celle du joueur  $B$  les numéros  $\{1, 6, 8\}$  et celle du joueur  $C$  les numéros  $\{3, 5, 7\}$ . Une partie oppose deux joueurs. Chacun tire un numéro dans son urne. Celui qui tire le plus grand numéro l'emporte. Démontrer que, en probabilité,  $A$  l'emporte sur  $B$ ,  $B$  l'emporte sur  $C$  et  $C$  l'emporte sur  $A$ .

### — Exercice 11 ●●○○ — ☑ Paradoxe des anniversaires

- On range  $k$  objets dans  $n$  tiroirs. Avec quelle probabilité ces objets se retrouvent-ils dans des tiroirs distincts ?
- À partir de combien de personnes dans un groupe la probabilité que deux d'entre elles au moins aient la même date d'anniversaire est-elle plus grande que  $\frac{1}{2}$  ? Et pour  $\frac{9}{10}$  ? Pour simplifier, on ne tiendra pas compte des années bissextiles.  
(On pourra utiliser une calculatrice ou un logiciel de calcul numérique.)
- Soit  $t \geq 0$ . On se place à nouveau dans le contexte de la question 1 avec  $k = \lfloor t\sqrt{n} \rfloor$  et on note  $p_n$  la probabilité de l'événement « Les  $k$  objets se retrouvent dans des tiroirs distincts ».
  - Montrer que, pour tout  $x \in [0, \frac{1}{2}]$ ,  $-x - x^2 \leq \ln(1 - x) \leq -x$ .
  - (●●●) En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = e^{-t^2/2}$ .

## Probabilités conditionnelles

### — Exercice 12 ●●○○ — ☑

Une urne contient initialement  $a$  boules blanches et  $b$  boules noires, pour un total de  $N = a + b$  boules. On effectue une série de tirages de la façon suivante : on choisit une boule au hasard dans l'urne. Si elle est blanche, on la remet. Si elle est noire, on la remplace par une blanche. Puis on procède au tirage suivant.

- On note  $N_j$  l'événement « on obtient une boule noire au  $j^{\text{e}}$  tirage » et  $A_n$  l'événement « on obtient pour la première fois une boule blanche au  $n^{\text{e}}$  tirage ». Exprimer  $A_n$  en fonction des événements  $N_j$  et calculer  $P(A_n)$ .
- On note  $B_l$  l'événement « il reste  $l$  boules noires dans l'urne lorsque l'on obtient la première boule blanche ».

a. Montrer que si  $l \in \llbracket 1, b \rrbracket$ , alors  $P(B_l) = \frac{b!}{N^b} \left( \frac{N^l}{l!} - \frac{N^{l-1}}{(l-1)!} \right)$ .

b. Calculer  $P(B_0)$ .

c. Vérifier que  $\sum_{l=0}^b P(B_l) = 1$ . Était-ce prévisible ?

### — Exercice 13 ●○○○ — ☑ Banque d'exercices CCINP 2025 (105)

- Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.
- On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut  $\frac{1}{2}$ .
  - On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
  - Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé  $n$  fois et on obtient  $n$  fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité  $p_n$  que ce dé soit pipé ?
  - Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$ . Interpréter ce résultat.

### — Exercice 14 ●●○○ — ☑ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ . On dispose de $n+1$ urnes $U_0, U_1, \dots, U_n$ . L'urne $U_k$ contient $k$ boules blanches et $n - k$ noires.

- On choisit une urne au hasard et on tire une boule de l'urne. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche ?
- On choisit une urne au hasard et on tire une boule de l'urne. Celle-ci est blanche. Quelle est la probabilité d'avoir tiré cette boule dans l'urne  $U_k$ , avec  $0 \leq k \leq n$ .
- On choisit une urne au hasard et on tire successivement et avec remise 2 boules de cette urne. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules blanches ?
- Reprendre la question précédente en supposant que le tirage se fait sans remise.

### — Exercice 15 ●○○○ — ☑ Banque d'exercices CCINP 2025 (107)

On dispose de deux urnes  $U_1$  et  $U_2$ . L'urne  $U_1$  contient deux boules blanches et trois boules noires. L'urne  $U_2$  contient quatre boules blanches et trois boules noires.

On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes : on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie. On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.



- Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne  $U_1$ .
- Si la boule tirée était noire, le tirage suivant se fait dans l'urne  $U_2$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $B_n$  l'événement « la boule tirée au  $n^{\text{e}}$  tirage est blanche » et on pose  $p_n = P(B_n)$ .

1. Calculer  $p_1$ .

2. Prouver que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$ .

3. En déduire, pour tout entier naturel  $n$  non nul, la valeur de  $p_n$ .

— **Exercice 16** ●●○○ —   On considère trois urnes  $A$ ,  $B$  et  $C$  identiques, qui contiennent des boules blanches et noires avec une proportion  $p$  de boules blanches.

On effectue une succession de tirages avec remise. Initialement, on tire une boule dans l'urne  $A$ . Ensuite, si la boule tirée est blanche, on tire la boule suivante dans la même urne, sinon on tire la boule suivante dans une des deux autres urnes, choisie équiprobablement. Cette règle s'applique à tous les tirages suivants.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $a_n$  (resp.  $b_n$ ,  $c_n$ ) la probabilité que le  $n^{\text{e}}$  tirage soit effectué dans l'urne  $A$  (resp.  $B$ ,  $C$ ). On note enfin  $X_n$  la matrice colonne  $(a_n \ b_n \ c_n)^T$ .

1. Donner  $X_1$ .
2. Démontrer qu'il existe une matrice  $M$  indépendante de  $n$  telle que  $X_{n+1} = MX_n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .
3. En déduire que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $X_n = M^{n-1}X_1$ .
4. Déterminer  $M^n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .
5. En déduire les expressions de  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$  en fonction de  $n$ .
6. Déterminer les limites des suites  $(a_n)_{n \geq 0}$ ,  $(b_n)_{n \geq 0}$  et  $(c_n)_{n \geq 0}$ . Ces résultats étaient-ils prévisibles ?

## Lois de variables aléatoires

— **Exercice 17** ●○○○ —  **Banque d'exercices CCINP 2025 (109)**


Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Une urne contient  $n$  boules blanches numérotées de 1 à  $n$  et deux boules noires numérotées 1 et 2. On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne. On note  $X$  la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche. On note  $Y$  la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de  $X$ .
2. Déterminer la loi de  $Y$ .

— **Exercice 18** ●●○○ — **Urne de Pólya**

Une urne, dite de Pólya, contient au départ une boule noire et une blanche. On répète  $n$  fois l'expérience aléatoire qui consiste à tirer une boule, à la remettre et à ajouter une boule supplémentaire de la même couleur.


1. Pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , combien l'urne contient-elle de boules à l'issue de la  $k^{\text{e}}$  expérience ?
2. Pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $N_k$  le nombre de boules blanches dans l'urne à l'issue de la  $k^{\text{e}}$  expérience. Montrer par récurrence que  $N_k$  suit la loi uniforme sur  $\llbracket 1, k+1 \rrbracket$ , pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

— **Exercice 19** ●○○○ — 

Soit  $X$  une variable uniforme sur  $\llbracket 1, n^2 \rrbracket$ , avec  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer la loi de  $\lfloor \sqrt{X} \rfloor$ .

— **Exercice 20** ●○○○ — 


Soit  $X$  une variable uniforme sur  $\llbracket 1, 6n \rrbracket$ . Déterminer la loi de  $\cos\left(\frac{X\pi}{3}\right)$ .

— **Exercice 21** ●○○○ — 

Pour animer une soirée, on a le choix entre deux groupes de rock : l'un composé de quatre musiciens et l'autre de six musiciens. La probabilité qu'un musicien soit indisponible est  $p \in ]0, 1[$ , indépendamment des autres musiciens. Un groupe ne peut se produire que si la moitié au moins de ses musiciens est disponible. Quel groupe choisir ?



— **Exercice 22** ●●○○ —  **Issue la plus probable d'une loi binomiale**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $p \in ]0, 1[$  et  $X$  une variable binomiale de paramètre  $(n, p)$ . Pour quelle valeur de  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  la probabilité  $P(X = k)$  est-elle maximale ?

— **Exercice 23** ●●○○ — 

On considère  $n \in \mathbb{N}^*$  urnes numérotées de 1 à  $n$ . On suppose que pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , l'urne numéro  $i$  contient  $i$  boules blanches et  $n - i$  boules noires.

1. On choisit une urne au hasard et on y tire simultanément  $r$  boules ( $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ).
  - a. Calculer la probabilité  $p_n^r$  d'obtenir exactement  $r$  boules blanches.
  - b. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n^r$ .
2. On choisit une urne au hasard et on y effectue  $r$  tirages ( $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ), successifs et avec remise, d'une boule.
  - a. Calculer la probabilité  $q_n^r$  d'obtenir exactement  $r$  boules blanches.
  - b. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n^r$ .

— **Exercice 24** ●●○○ —   Soit  $\sigma$  une permutation aléatoire de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

On note  $N$  le plus grand entier  $k$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  pour lequel  $\sigma(1) < \dots < \sigma(k)$ . Déterminer la loi de  $N$ .

— **Exercice 25** ●●○○ —   **X MP 2022**

1. Soit  $n \geq 2$  et  $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$  avec  $\tau$  une transposition. Comparer le nombre de cycles à supports disjoints de  $\sigma$  et de  $\sigma\tau$ .
2. On munit  $\mathfrak{S}_n$  d'une distribution uniforme de probabilité. Soit  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  avec  $i \neq j$ , calculer la probabilité que  $i$  et  $j$  soient dans un même cycle.

## Indépendance

— **Exercice 26** ●○○○ — ☑ Trois personnes  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont placées au hasard et indépendamment sur une ligne droite. Notons  $E$  l'événement «  $B$  est à la droite de  $A$  » et  $F$  l'événement «  $C$  est à la droite de  $A$  ». Ces deux événements sont-ils indépendants ?

— **Exercice 27** ●●○○ — ☑ Une urne contient 6 boules blanches et 6 noires.

1. Lorsque l'on tire simultanément 8 boules, avec quelle probabilité tire-t-on toutes les blanches ?
2. On répète à présent  $n$  fois avec remise l'expérience aléatoire de la question 1. À partir de quelle valeur de  $n$  la probabilité de tirer au moins une fois toutes les boules blanches est-elle supérieure ou égale à  $\frac{1}{2}$  ?

— **Exercice 28** ●○○○ — On se place dans un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{P})$  (fini).

1. Soit  $A$  et  $B$  deux événements indépendants tels que  $A \subset B$ . Montrer que  $P(A) = 0$  ou  $P(B) = 1$ .
2. Montrer que si  $P(A) = 0$  ou  $P(A) = 1$ , alors  $A$  est indépendant de tout événement. Que dire de la réciproque ?
3. Montrer que deux événements incompatibles de probabilités non nulles ne sont jamais indépendants.
4. Soit  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois événements indépendants. Montrer que les événements  $A$  et  $B \cap C$  (resp.  $A$  et  $B \cup C$ ) sont indépendants.

— **Exercice 29** ●●○○ — ☑ Soit  $(\Omega, \mathcal{P})$  un espace probabilisé fini.

1. À quelle condition un événement  $A \in \mathcal{P}(\Omega)$  est-il indépendant de lui-même ?
2. Soit  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$  des événements indépendants tels que  $P(A_k) \in ]0, 1[$ , pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Montrer que  $|\Omega| \geq 2^n$ .

— **Exercice 30** ●●○○ — ☑

On choisit simultanément lors du premier tirage deux entiers distincts entre 1 et  $n$ , avec  $n \geq 5$ , puis indépendamment trois entiers distincts entre 1 et  $n$  lors d'un second tirage.

1. Avec quelle probabilité les entiers tirés lors du premier tirage le sont-ils aussi au second ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'aucun des entiers tirés au premier tirage ne le soit de nouveau au deuxième ?

— **Exercice 31** ●○○○ — ☑ Soit  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé fini, indépendantes et uniformes sur  $\llbracket 1, 2p \rrbracket$ . Avec quelle probabilité le produit  $X_1 \dots X_n$  est-il pair ?

— **Exercice 32** ●●○○ — ☑ Un promeneur capricieux se promène entre deux maisons, nommées  $A$  et  $B$ . À l'instant 0, il est en  $A$ . À chaque instant, il joue au dé de la maison vers laquelle il va. S'il tire 1 ou 6, il change de maison, sinon il ne bouge pas. On définit les événements  $A_n$  « Le promeneur est en  $A$  à l'instant  $n$  » et  $B_n$  « Le promeneur est en  $B$  à l'instant  $n$  ». On note, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = P(A_n)$  et  $b_n = P(B_n)$ .

1. Établir une relation entre  $a_{n+1}$ ,  $b_{n+1}$ ,  $a_n$  et  $b_n$ .
2. En déduire  $a_n$  et  $b_n$  en fonction de  $n$ .
3. Calculer  $P_{A_i}(A_j)$ , pour  $(i, j) \in \mathbb{N}^2$  et  $i < j$ . Les événements  $A_i$  et  $A_j$  sont-ils indépendants ?

— **Exercice 33** ●●○○ — ☑ Dans une succession de  $n$  Pile-Face indépendants, on note  $p_n$  la probabilité qu'on n'ait jamais deux « Pile » consécutifs.

1. Calculer  $p_1$ ,  $p_2$  et  $p_3$ .
2. En conditionnant par le résultat des deux premiers lancers, établir un lien entre  $p_n$ ,  $p_{n+1}$  et  $p_{n+2}$ .
3. Montrer que la suite  $(p_n)_{n \geq 1}$  converge vers 0.

— **Exercice 34** ●●○○ — ☑ Mines MP - 2022

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  ainsi que  $A$  et  $B$  deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur  $\mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ . Calculer  $P(A \subset B)$ .

## Famille de variables aléatoires

— **Exercice 35** ●○○○ — ☑

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur  $\llbracket 1, 10 \rrbracket$ .

1. Déterminer la probabilité que la valeur prise par  $X$  soit supérieure ou égale à 7.
2. Déterminer la probabilité que les valeurs prises par  $X$  et  $Y$  soient égales.
3. Déterminer la probabilité que la valeur prise par  $X$  soit inférieure ou égale à celle prise par  $Y$ .
4. On note  $Z$  la variable aléatoire définie par  $Z = \max(X, Y)$ .
  - a. Déterminer, pour tout  $k \in \llbracket 1, 10 \rrbracket$ , la probabilité de l'événement  $(X \leq k)$ .
  - b. En déduire, pour tout  $k \in \llbracket 1, 10 \rrbracket$ , la probabilité de l'événement  $(Z \leq k)$ .
  - c. En déduire la loi de  $Z$ .

**Exercice 36** ●○○○ — 

On lance un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note  $X$  le numéro obtenu. On choisit alors au hasard avec équiprobabilité un entier  $Y$  entre 1 et  $X$ .

1. Préciser la loi de  $X$  et, pour tout  $x$  de  $X[\Omega]$ , la loi de  $Y$  sachant  $(X = x)$ .
2. Déterminer la loi du couple  $(X, Y)$ .
3. En déduire la loi de  $Y$  et retrouver la loi de  $X$ .

**Exercice 37** ●●○○ — Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles finis non vides ainsi que  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé fini. Montrer que  $(X, Y) \sim \mathcal{U}(E \times F)$  si et seulement si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes et de lois respectives  $\mathcal{U}(E)$  et  $\mathcal{U}(F)$ .

**Exercice 38** ●●○○ —  Soit  $X, Y$  et  $Z$  trois variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé fini, indépendantes et uniformes sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

1. Déterminer la loi de  $X + Y$ .
2. Calculer  $P(X + Y = Z)$ .

**Exercice 39** ●●○○ — Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles définies sur un même espace probabilisé fini. On suppose que, pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$P(X \leq x \text{ et } Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y).$$

Montrer que, pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$P(X = x \text{ et } Y \leq y) = P(X = x)P(Y \leq y),$$

puis que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.

**Exercice 40** ●●○○ — 

Soit  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé fini, indépendantes et uniformes sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . On pose  $M = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ .

1. Calculer  $P(M \geq k)$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , puis en déduire la loi de  $M$ .
2. Montrer que  $P(\exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_i = 1) \geq 1 - \frac{1}{e}$ .

**Exercice 41** ●●○○ —  Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé fini, indépendantes et de même loi.

1. Calculer  $P(X = Y)$  dans le cas où  $X$  et  $Y$  sont uniformes sur  $\llbracket 0, n \rrbracket$ , puis dans le cas où  $X$  et  $Y$  sont binomiales de paramètre  $(n, 1/2)$ .
2. Comparer les résultats obtenus en **1** lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Commentaire?
3. On note à présent  $u_0, \dots, u_n$  les valeurs communes de  $X$  et  $Y$  et on pose, pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $p_k = P(X = u_k)$ .

Étudier les variations de la fonction  $t \mapsto \sum_{k=0}^n \left( \frac{1-t}{n+1} + tp_k \right)^2$  sur  $[0, 1]$ , puis en déduire que  $P(X = Y) \geq \frac{1}{n+1}$ . À quelle condition nécessaire et suffisante cette inégalité est-elle une égalité? Explication?

**Exercice 42** ●●○○ —  Mines-Ponts MP 2022

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite i.i.d. de variables aléatoires à valeurs dans  $\{-1, 1\}$  et  $p \in ]0, 1[$ . On suppose que  $P(X_n = 1) = p$  et  $P(X_n = -1) = 1 - p$ . On pose  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . Montrer que

$$\left( \forall n \in \mathbb{N}^*, \max_{k \in \mathbb{Z}} P(S_{2n} = k) = P(S_{2n} = 0) \right) \iff p = \frac{1}{2}.$$

**Exercice 43** ●●○○ —  X MP 2022

Soit  $b$  et  $n$  des entiers supérieurs ou égaux à 2. Soit  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur  $\llbracket 0, b - 1 \rrbracket$ .

1. Soit  $i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ . Déterminer la probabilité de  $(X_{i+1} < X_i)$ .
2. Soit  $i, j \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$  tels que  $i + j \leq n$ . Déterminer la probabilité de l'événement  $(X_{i+j} < X_{i+j-1} < \dots < X_i)$ .

## Indications

**Exercice 2. 1.b à 3.** Procéder par récurrence sur l'entier  $n$ .

**Exercice 16. 2.** Utiliser la formule des probabilités totales pour exprimer  $a_{n+1}$ ,  $b_{n+1}$  et  $c_{n+1}$  en fonction de  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$ .

**Exercice 24.** On pourra s'intéresser à l'événement  $(N \geq k)$ .

**Exercice 25. 2.** Pour dénombrer de telles permutations, on pourra discuter selon la longueur du cycle qui contient  $i$  et  $j$ .

**Exercice 29.** On pourra montrer que les événements suivants sont deux à deux incompatibles :

$$\forall I \in \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket), \quad \mathcal{A}_I = \bigcap_{i=1}^n B_i \quad \text{où} \quad B_i = \begin{cases} A_i & \text{si } i \in I \\ \bar{A}_i & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Exercice 32. 1.** Appliquer la formule des probabilités totales avec le s.c.e.  $(A_n, B_n)$ .

**3.** Observer que la situation décrite possède une propriété d'invariance par translation dans le temps.

**Exercice 41. 1.** Utiliser la formule des probabilités totales avec le s.c.e.  $((X = k))_{0 \leq k \leq n}$ .

**Exercice 42.** On pourra commencer par établir que  $\frac{1}{2}(S_{2n} + 2n)$  suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(2n, p)$  et s'inspirer des résultats de l'exercice 22.

**Exercice 43.** Se ramener à une question combinatoire classique en montrant que la variable aléatoire  $X = (X_{i+j}, X_{i+j-1}, \dots, X_i)$  suit la loi uniforme  $\llbracket 0, b-1 \rrbracket^{j+1}$ .

## Éléments de réponses

**Exercice 1. 1.**  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$ . **2.**  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$ . **3.**  $(A_1 \cap \bar{A}_2) \cup (A_2 \cap \bar{A}_1)$ . **4.**  $A_1 \subset A_2$ . **5.**  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ . **6.**  $A_1 \cup A_2 = \Omega$ . **7.**  $\bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{n \geq p} A_n$ . **8.**  $\bigcap_{p \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{n \geq p} A_n$ .

**Exercice 3.**  $(a, b) = (\frac{1}{2n^2}, -\frac{1}{4n^2})$ .

**Exercice 5. 1.**  $P(A) = \frac{4^4}{6^5} = \frac{6!}{6^5} = \frac{5}{54}$ .

**2.**  $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{|\{1,2,4,5\}^5|}{|\Omega|} = 1 - (\frac{2}{3})^5 = \frac{211}{243}$ . **3.**  $P(C) = P(\bar{A})$ .

**4.**  $P(D) = 1 - P(\bar{D}) = 1 - \frac{|\{1,3,5\}^5|}{|\Omega|} = 1 - (\frac{1}{2})^5 = \frac{31}{32}$ .

**5.**  $E \rightarrow \bar{E}, (d_1, d_2, \dots, d_5) \mapsto (7 - d_1, d_2, \dots, d_5)$  réalise une bijection, ainsi  $P(E) = \frac{1}{2}$ .

**6.**  $P(F) = P(B \cap D) = 1 - P(\bar{B} \cup \bar{D}) = \dots$

**Exercice 6.**  $1 - (\frac{5}{6})^4 \approx 0,52 > 0,49 \approx 1 - (\frac{35}{36})^{24}$ .

**Exercice 7.**  $P(\text{Somme} = 9) = \frac{25}{6^3}$  et  $P(\text{Somme} = 10) = \frac{27}{6^3}$ .

**Exercice 8.** On se place dans l'univers des 4-combinaisons d'un ensemble à 8 éléments muni de la probabilité uniforme.

**1.**  $P(A) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{8}{4}} = \frac{3}{35}$ . **2.**  $P(B) = \frac{4 \times \binom{6}{2}}{\binom{8}{4}} = \frac{3}{7}$ . **3.**  $P(B) - P(A) = \frac{12}{35}$ .

**Exercice 9. 1.**  $3^n$ . **2.**  $(3/4)^n$ .

**Exercice 11. 1.**  $\frac{n!}{n^k(n-k)!}$  pour  $k \leq n$ . **2.** 23 et 41.

**Exercice 12. 1.**  $A_n = \left( \bigcap_{j=1}^{n-1} N_j \right) \cap \bar{N}_n$  et  $P(A_n) = \frac{b!(a+n-1)}{(b-n+1)!N^n}$ .

**2.b**  $P(B_0) = \frac{b!}{N^b}$ . **2.c** Oui, puisque  $(B_i)_{0 \leq i \leq n}$  est un s.c.e.

**Exercice 13. 2.a** 1/2. **2.b**  $p_n = \frac{1}{1 + \frac{1}{3^{n-1}}}$ . **2.c**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 1$ .

**Exercice 14. 1.**  $\frac{1}{2}$ . **2.**  $\frac{2k}{n(n+1)}$ . **3.**  $\frac{1}{3} + \frac{1}{6n}$ . **4.**  $\frac{1}{3}$ .

**Exercice 15. 1.**  $p_1 = \frac{17}{35}$ . **3.**  $p_n = \frac{1}{82}(-\frac{6}{35})^n + \frac{20}{41}$ .

**Exercice 16. 1.**  $X_1 = (1 \ 0 \ 0)^T$ . **2.**  $M = \frac{3p-1}{2}I_3 + \frac{1-p}{2}J$ .

**4.**  $M^n = (\frac{3p-1}{2})^n I_3 + \frac{1}{3}[1 - (\frac{3p-1}{2})^n]J$ . **5.**  $a_n = (\frac{3p-1}{2})^n + \frac{1}{3}[1 - (\frac{3p-1}{2})^n]$

et  $b_n = c_n = \frac{1}{3}[1 - (\frac{3p-1}{2})^n]$ . **6.**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \frac{1}{3}$ .

**Exercice 17. 1.**  $P(X = 1) = \frac{n}{n+2}$ ,  $P(X = 2) = \frac{2n}{(n+1)(n+2)}$

et  $P(X = 3) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$ . **2.**  $P(Y = k) = \frac{2(n+2-k)}{(n+1)(n+2)}$  pour  $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ .

**Exercice 19.**  $P(\lfloor \sqrt{X} \rfloor = k) = \frac{(k+1)^2 - k^2}{n^2}$  pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

**Exercice 20.** Posons  $Y = \cos(\frac{X\pi}{3})$ .

$P(Y = 1) = P(Y = -1) = \frac{1}{6}$  et  $P(Y = \frac{1}{2}) = P(Y = -\frac{1}{2}) = \frac{1}{3}$ .

**Exercice 21.** Préférer le groupe de quatre musiciens si et seulement si  $p \geq 0,4$ .

**Exercice 22.**  $P(X = k)$  est maximal pour  $k = \lfloor (n+1)p \rfloor$ .

**Exercice 23. 1.**  $p_n^r = \frac{n+1}{n(r+1)}$ . **3.**  $q_n^r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \binom{i}{n}^r$ . **2. et 4.**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n^r = \lim_{n \rightarrow +\infty} q_n^r = \frac{1}{r+1}$ .

**Exercice 24.**  $P(N = k) = \frac{k}{(k+1)!}$ , pour  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , et  $P(N = n) = \frac{1}{n!}$ .

**Exercice 25. 2.** 1/2. **1.** En notant  $C(\sigma)$  le nombre de cycles disjoints de  $\sigma$  :

$$C(\sigma(ij)) = \begin{cases} C(\sigma) & \text{si } \begin{cases} i \in \text{supp}(\sigma) \text{ et } j \notin \text{supp}(\sigma) \\ j \in \text{supp}(\sigma) \text{ et } i \notin \text{supp}(\sigma) \end{cases} \\ C(\sigma) - 1 & \text{si } i \text{ et } j \text{ dans des cycles distincts.} \\ C(\sigma) + 1 & \text{si } \begin{cases} i, j \notin \text{supp}(\sigma) \\ i, j \text{ dans le même cycle avec } \sigma(i) \neq j \text{ et } \sigma(j) \neq i \end{cases} \end{cases}$$

**Exercice 26.**  $\Omega = \mathfrak{S}_{\{A,B,C\}}$  muni de la probabilité uniforme.

$P(E) = P(F) = \frac{1}{2}$  et  $P(E \cap F) = \frac{1}{3}$ .

**Exercice 27. 1.**  $\frac{\binom{8}{2}}{\binom{12}{8}} = \frac{1}{33}$ . **2.**  $n \geq 23$ .

**Exercice 29. 1.** si et seulement si  $P(A) \in \{0, 1\}$ .

**Exercice 30.** 1.  $\frac{n-2}{\binom{n}{3}}$ . 2.  $\frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)}$ .

**Exercice 31.**  $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ .

**Exercice 32.** 1.  $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n, \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}b_n. \end{cases}$  2.  $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 3^{-n}$  et  $b_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times 3^{-n}$

3.  $P_{A_i}(A_j) = P(A_{j-i})$ .

**Exercice 33.** 1.  $p_1 = 1, p_2 = 3/4$  et  $p_3 = 5/8$ . 2.  $p_{n+2} = \frac{1}{2}p_{n+1} + \frac{1}{4}p_n$ .

**Exercice 34.**  $P(A \subset B) = (3/4)^n$ .

**Exercice 35.** 1.  $2/5$ . 2.  $1/10$ . 3.  $11/20$ . 4.a  $k/10$ . 4.b  $(k/10)^2$ . 4.c  $P(Z = k) = \left(\frac{k}{10}\right)^2 - \left(\frac{k-1}{10}\right)^2$ .

**Exercice 36.** 1.  $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, 6 \rrbracket)$  et  $Y_{(X=x)} \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, x \rrbracket)$ .

2.  $P((X, Y) = (x, y)) = \begin{cases} \frac{1}{6x} & \text{si } y \leq x \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$  3.  $P(Y = y) = \sum_{x=y}^6 \frac{1}{6x}$ .

**Exercice 38.** 1.  $P(X + Y = k) = \begin{cases} \frac{k-1}{2n^2} & \text{si } k \leq n+1 \\ \frac{2n+1-k}{n^2} & \text{si } k \geq n+1. \end{cases}$  2.  $\frac{n-1}{2n^2}$ .

**Exercice 40.** 1.  $P(M \geq k) = \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)^n$  et  $P(M = k) = \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n$ .

**Exercice 41.** 1. et 2.  $P(X = Y) = \frac{1}{n+1}$  et  $P(X = Y) = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ .

3. La fonction est croissante sur  $[0, 1]$ ,  $f(0) = \frac{1}{n+1}$  et  $f(1) = P(X = Y)$ . Il y a égalité si et seulement si  $X, Y \sim \mathcal{U}(\llbracket 0, n \rrbracket)$ .

**Exercice 43.** 1.  $\frac{b-1}{2b}$ . 2.  $\frac{\binom{b}{j+1}}{b^{j+1}}$ .