31 Probabilités sur un univers fini, variables aléatoires et lois

Cahier de calcul : $\varnothing$. **Banque CCINP :** exercices 13, 15 et 17.

Événements et probabilité

Exercice 1 ●○○○

Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille d'événements d'un univers Ω. Décrire à l'aide des opérations ou relations ensemblistes usuelles les situations ou les événements suivants.

1. Tous les événements A_i se réalisent.
2. L'un au moins des A_i se réalisent.
3. L'un seulement des événements A_1 et A_2 est réalisé.
4. À chaque fois que A_1 est réalisé, A_2 l'est aussi.
5. A_1 et A_2 ne se produisent jamais ensemble.
6. A_1 ou A_2 se produisent toujours.
7. Tous les événements A_i se réalisent à partir d'un certain rang.
8. Une infinité de A_i se réalisent.

Exercice 2 ●●○○ Sous-additivité finie

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.

1. **a.** Établir que, pour tous $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$, $\mathrm{P}(A \cup B) \leqslant \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$.

   b. Plus généralement, démontrer que
$$\forall (E_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in \mathscr{P}(\Omega)^n, \quad \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(E_k) \quad \textit{(sous-additivité finie de P)}.$$
2. *Inégalité de Bonferroni.* Soit $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de n événements de (Ω, P). Démontrer l'inégalité
$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathrm{P}(A_i \cap A_j).$$
3. *Inégalité de Kounias.* Soit $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de n événements de (Ω, P). Démontrer l'inégalité
$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \min_{k\in[\![1,n]\!]} \left\{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i) - \sum_{i\neq k} \mathrm{P}(A_i \cap A_k)\right\}.$$

Exercice 3 ●○○○

Soit l'univers $\Omega = [\![1\,,2n]\!]$. Peut-on trouver deux réels a et b tels que
$$\forall k \in \Omega, \quad \mathrm{P}(\{k\}) = ak + b$$
définisse une distribution de probabilité et que $\mathrm{P}([\![1\,,n]\!]) = \frac{1}{4}$?

Exercice 4 ●○○○

Sojent Ω un univers fini et P_1 et P_2 deux probabilités sur Ω. Montrer que $\mathrm{P} = \mu\mathrm{P}_1 + (1-\mu)\mathrm{P}_2$, avec $\mu \in [0\,,1]$, est une probabilité sur Ω.

Exercice 5 ●○○○

On lance 5 dés à 6 faces non pipés. Déterminer les probabilités

1. d'obtenir 5 numéros différents ;
2. d'obtenir au moins un multiple de 3 ;
3. d'obtenir au moins deux faces identiques ;
4. que le produit des chiffres obtenus soit pair ;
5. que la somme des chiffres obtenus soit paire ;
6. d'avoir au moins un multiple de 3 et au moins un numéro pair.

Exercice 6 ●○○○ Paradoxe du Chevalier de Méré

Est-il plus probable d'obtenir au moins une fois un 6 en quatre jets de dé que d'obtenir au moins une fois un double 6 en vingt-quatre jets de deux dés ?

Exercice 7 ●●○○

Expliquer pourquoi, lorsque l'on jette trois dés, on obtient plus souvent la somme 10 que la somme 9, alors que ces deux sommes sont obtenues de six façons différentes chacune.

Exercice 8 ●●○○

Dans un tiroir, 8 paires de chaussettes distinctes sont rangées. On prend simultanément 4 chaussettes au hasard.

1. Quelle est la probabilité d'avoir reconstitué deux paires ?
2. Au moins une paire ?
3. Exactement une paire ?

Exercice 9 ●●○○ Mines-Ponts MP 2022

Soit $n \geqslant 2$ et E un ensemble fini de cardinal n.

1. Dénombrer les couples $(X, Y) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que $X \subset Y$.
2. Une urne contient n boules indiscernables. On en tire aléatoirement un sous-ensemble (avec probabilité uniforme), puis on remet les boules tirées dans l'urne et on répète l'opération. Calculer la probabilité pour qu'aucune boule n'ait été tirée deux fois.

Exercice 10 ●○○○ — Un jeu non transitif

Trois joueurs A, B et C piochent un numéro, chacun dans son urne. L'urne du joueur A contient les numéros $\{2, 4, 9\}$, celle du joueur B les numéros $\{1, 6, 8\}$ et celle du joueur C les numéros $\{3, 5, 7\}$. Une partie oppose deux joueurs. Chacun tire un numéro dans son urne. Celui qui tire le plus grand numéro l'emporte. Démontrer que, en probabilité, A l'emporte sur B, B l'emporte sur C et C l'emporte sur A.

Exercice 11 ●●○○ — Paradoxe des anniversaires

1. On range k objets dans n tiroirs. Avec quelle probabilité ces objets se retrouvent-ils dans des tiroirs distincts ?
2. À partir de combien de personnes dans un groupe la probabilité que deux d'entre elles au moins aient la même date d'anniversaire est-elle plus grande que $\frac{1}{2}$? Et pour $\frac{9}{10}$? Pour simplifier, on ne tiendra pas compte des années bissextiles.
   (On pourra utiliser une calculatrice ou un logiciel de calcul numérique.)
3. Soit $t \geqslant 0$. On se place à nouveau dans le contexte de la question **1** avec $k = \lfloor t\sqrt{n} \rfloor$ et on note p_n la probabilité de l'événement « Les k objets se retrouvent dans des tiroirs distincts ».
   a. Montrer que, pour tout $x \in \left[0\,,\frac{1}{2}\right]$, $-x - x^2 \leqslant \ln(1-x) \leqslant -x$.
   b. (●●●) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \mathrm{e}^{-t^2/2}$.

Probabilités conditionnelles

Exercice 12 ●●○○

Une urne contient initialement a boules blanches et b boules noires, pour un total de $N = a + b$ boules. On effectue une série de tirages de la façon suivante : on choisit une boule au hasard dans l'urne. Si elle est blanche, on la remet. Si elle est noire, on la remplace par une blanche. Puis on procède au tirage suivant.

1. On note N_j l'événement « on obtient une boule noire au j-ème tirage » et A_n l'événement « on obtient pour la première fois une boule blanche au n-ième tirage ». Exprimer A_n en fonction des événements N_j et calculer $\mathrm{P}(A_n)$.
2. On note B_l l'événement « il reste l boules noires dans l'urne lorsque l'on obtient la première boule blanche ».
   a. Montrer que si $l \in [\![1\,,b]\!]$, alors $\mathrm{P}(B_l) = \dfrac{b!}{N^b}\left(\dfrac{N^l}{l!} - \dfrac{N^{l-1}}{(l-1)!}\right)$.
   b. Calculer $\mathrm{P}(B_0)$.
   c. Vérifier que $\sum\limits_{l=0}^{b} \mathrm{P}(B_l) = 1$. Était-ce prévisible ?

Exercice 13 ●○○○ — Banque d'exercices CCINP 2024 (105)

1. Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.
2. On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.
   a. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
   b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
   c. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

Exercice 14 ●●○○ —

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de $n+1$ urnes $U_0, U_1, \ldots, U_n$. L'urne U_k contient k boules blanches et $n-k$ noires.

1. On choisit une urne au hasard et on tire une boule de l'urne. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche ?
2. On choisit une urne au hasard et on tire une boule de l'urne. Celle-ci est blanche. Quelle est la probabilité d'avoir tiré cette boule dans l'urne U_k, avec $0 \leqslant k \leqslant n$.
3. On choisit une urne au hasard et on tire successivement et avec remise 2 boules de cette urne. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules blanches ?
4. Reprendre la question précédente en supposant que le tirage se fait sans remise.

Exercice 15 ●○○○ — Banque d'exercices CCINP 2024 (107)

On dispose de deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires. L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.

On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes : on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie. On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.

- Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1.
- Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au n^{e} tirage est blanche » et on pose $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.
3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

Exercice 16 ●●○○ On considère trois urnes A, B et C identiques, qui contiennent des boules blanches et noires avec une proportion p de boules blanches.

On effectue une succession de tirages avec remise. Initialement, on tire une boule dans l'urne A. Ensuite, si la boule tirée est blanche, on tire la boule suivante dans la même urne, sinon on tire la boule suivante dans une des deux autres urnes, choisie équiprobablement. Cette règle s'applique à tous les tirages suivants.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n (resp. b_n, c_n) la probabilité que le n^{e} tirage soit effectué dans l'urne A (resp. B, C). On note enfin X_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}^\top$.

1. Donner X_1.
2. Démontrer qu'il existe une matrice M indépendante de n telle que $X_{n+1} = MX_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = M^{n-1}X_1$.
4. Déterminer M^n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
5. En déduire les expressions de a_n, b_n et c_n en fonction de n.
6. Déterminer les limites des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$, $(b_n)_{n\geqslant 0}$ et $(c_n)_{n\geqslant 0}$. Ces résultats étaient-ils prévisibles ?

Lois de variables aléatoires

Exercice 17 ●○○○ Banque d'exercices CCINP 2024 (109)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2. On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche. On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de Y.

Exercice 18 ●●○○ Urne de Pólya

Une urne, dite de Pólya, contient au départ une boule noire et une blanche. On répète n fois l'expérience aléatoire qui consiste à tirer une boule, à la remettre et à ajouter une boule supplémentaire de la même couleur.

1. Pour tout $k \in [\![1\,,n]\!]$, combien l'urne contient-elle de boules à l'issue de la k^{e} expérience ?
2. Pour tout $k \in [\![1\,,n]\!]$, on note N_k le nombre de boules blanches dans l'urne à l'issue de la k^{e} expérience. Montrer par récurrence que N_k suit la loi uniforme sur $[\![1\,,k+1]\!]$, pour tout $k \in [\![1\,,n]\!]$.

Exercice 19 ●○○○

Soit X une variable uniforme sur $[\![1\,,n^2]\!]$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi de $\lfloor \sqrt{X} \rfloor$.

Exercice 20 ●○○○

Soit X une variable uniforme sur $[\![1\,,6n]\!]$. Déterminer la loi de $\cos\left(\dfrac{X\pi}{3}\right)$.

Exercice 21 ●○○○

Pour animer une soirée, on a le choix entre deux groupes de rock : l'un composé de quatre musiciens et l'autre de six musiciens. La probabilité qu'un musicien soit indisponible est $p \in \,]0\,,1[$, indépendamment des autres musiciens. Un groupe ne peut se produire que si la moitié au moins de ses musiciens est disponible. Quel groupe choisir ?

Exercice 22 ●●○○

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \,]0\,,1[$ et X une variable binomiale de paramètre (n, p).
Pour quelle valeur de $k \in [\![0\,,n]\!]$ la probabilité $\mathrm{P}(X = k)$ est-elle maximale ?

Exercice 23 ●●○○

On considère $n \in \mathbb{N}^*$ urnes numérotées de 1 à n. On suppose que pour tout $i \in [\![1\,,n]\!]$, l'urne numéro i contient i boules blanches et $n-i$ boules noires.

1. On choisit une urne au hasard et on y tire simultanément r boules ($r \in [\![1\,,n]\!]$).
   a. Calculer la probabilité p_n^r d'obtenir exactement r boules blanches.
   b. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n^r$.
2. On choisit une urne au hasard et on y effectue r tirages ($r \in [\![1\,,n]\!]$), successifs et avec remise, d'une boule.
   a. Calculer la probabilité q_n^r d'obtenir exactement r boules blanches.
   b. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n^r$.

Exercice 24 ●●○○ Soit σ une permutation aléatoire de $[\![1\,,n]\!]$. On note N le plus grand entier k de $[\![1\,,n]\!]$ pour lequel $\sigma(1) < \ldots < \sigma(k)$. Déterminer la loi de N.

Exercice 25 ●●○○ X MP 2022

1. Soit $n \geqslant 2$ et $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ avec τ une transposition. Comparer le nombre de cycles à supports disjoints de σ et de $\sigma\tau$.
2. On munit $\mathfrak{S}_n$ d'une distribution uniforme de probabilité. Soit $i, j \in [\![1\,,n]\!]$ avec $i \neq j$, calculer la probabilité que i et j soient dans un même cycle.

Indépendance

Exercice 26 ●○○○ Trois personnes A, B et C sont placées au hasard et indépendamment sur une ligne droite. Notons E l'événement « B est à la droite de A » et F l'événement « C est à la droite de A ». Ces deux événements sont-ils indépendants ?

Exercice 27 ●●○○ Une urne contient 6 boules blanches et 6 noires.

1. Lorsque l'on tire simultanément 8 boules, avec quelle probabilité tire-t-on toutes les blanches ?
2. On répète à présent n fois avec remise l'expérience aléatoire de la question 1. À partir de quelle valeur de n la probabilité de tirer au moins une fois toutes les boules blanches est-elle supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$?

Exercice 28 ●○○○ On se place dans un espace probabilisé (Ω, P).

1. Soit A et B deux événements indépendants tels que $A \subset B$. Montrer que $\mathrm{P}(A) = 0$ ou $\mathrm{P}(B) = 1$.
2. Montrer que si $\mathrm{P}(A) = 0$ ou $\mathrm{P}(A) = 1$, alors A est indépendant de tout événement. Que dire de la réciproque ?
3. Montrer que deux événements incompatibles de probabilités non nulles ne sont jamais indépendants.
4. Soit A, B et C trois événements indépendants. Montrer que les événements A et $B \cap C$ (resp. A et $B \cup C$) sont indépendants.

Exercice 29 ●●●○ Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.

1. À quelle condition un événement $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ est-il indépendant de lui-même ?
2. Soit $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{P}(\Omega)$ des événements indépendants tels que $\mathrm{P}(A_k) \in]0,1[$, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$. Montrer que $|\Omega| \geqslant 2^n$.

Exercice 30 ●●○○

On choisit simultanément lors du premier tirage deux entiers distincts entre 1 et n, avec $n \geqslant 5$, puis indépendamment trois entiers distincts entre 1 et n lors d'un second tirage.

1. Avec quelle probabilité les entiers tirés au premier tirage le sont-ils aussi au deuxième ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'aucun des entiers tirés au premier tirage ne le soit de nouveau au deuxième ?

Exercice 31 ●○○○ Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé fini, indépendantes et uniformes sur $[\![1, 2p]\!]$.
Avec quelle probabilité le produit $X_1 \dots X_n$ est-il pair ?

Exercice 32 ●●○○ Un promeneur capricieux se promène entre deux maisons, nommées A et B. À l'instant 0, il est en A. À chaque instant, il joue au dé la maison vers laquelle il va. S'il tire 1 ou 6, il change de maison, sinon il ne bouge pas. On définit les événements A_n « Le promeneur est en A à l'instant n » et B_n « Le promeneur est en B à l'instant n ». On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \mathrm{P}(A_n)$ et $b_n = \mathrm{P}(B_n)$.

1. Établir une relation entre a_{n+1}, b_{n+1}, a_n et b_n.
2. En déduire a_n et b_n en fonction de n.
3. Calculer $\mathrm{P}_{A_i}(A_j)$, pour $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ et $i < j$. Les événements A_i et A_j sont-ils indépendants ?

Exercice 33 ●○○○ Dans une succession de n Pile-Face indépendants, on note p_n la probabilité qu'on n'ait jamais deux « Pile » consécutifs.

1. Calculer p_1, p_2 et p_3.
2. En conditionnant par le résultat des deux premiers lancers, établir un lien entre p_n, p_{n+1} et p_{n+2}.
3. Montrer que la suite $(p_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers 0 .

Exercice 34 ●●○○ Mines MP - 2022

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ ainsi que A et B deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\mathscr{P}([\![1,n]\!])$. Calculer $\mathrm{P}(A \subset B)$.

Famille de variables aléatoires

Exercice 35 ●○○○

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1, 10]\!]$.

1. Déterminer la probabilité que la valeur prise par X soit supérieure ou égale à 7.
2. Déterminer la probabilité que les valeurs prises par X et Y soient égales.
3. Déterminer la probabilité que la valeur prise par X soit inférieure ou égale à celle prise par Y .
4. On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \max(X, Y)$.
   - **a.** Déterminer, pour tout $k \in [\![1, 10]\!]$, la probabilité de l'événement $(X \leqslant k)$.
   - **b.** En déduire, pour tout $k \in [\![1, 10]\!]$, la probabilité de l'événement $(Z \leqslant k)$.
   - **c.** En déduire la loi de Z.

Exercice 36 ●○○○

On lance un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note X le numéro obtenu. On choisit alors au hasard avec équiprobabilité un entier Y entre 1 et X.

1. Préciser la loi de X et, pour tout x de $X(\Omega)$, la loi de Y sachant $(X = x)$.
2. Déterminer la loi du couple (X, Y).
3. En déduire la loi de Y et retrouver la loi de X.

Exercice 37 ●●○○

Soit E et F deux ensembles finis non vides ainsi que X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé fini.
Montrer que $(X, Y) \sim \mathscr{U}(E \times F)$ si et seulement si X et Y sont indépendantes et de lois respectives $\mathscr{U}(E)$ et $\mathscr{U}(F)$.

Exercice 38 ●●○○

Soit X, Y et Z trois variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé fini, indépendantes et uniformes sur $[\![1\,,n]\!]$.

1. Déterminer la loi de $X + Y$.
2. Calculer $\mathrm{P}(X + Y = Z)$.

Exercice 39 ●●○○

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur un même espace probabilisé fini. On suppose que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{P}(X \leqslant x \text{ et } Y \leqslant y) = \mathrm{P}(X \leqslant x)\mathrm{P}(Y \leqslant y).$$

Montrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{P}(X = x \text{ et } Y \leqslant y) = \mathrm{P}(X = x)\mathrm{P}(Y \leqslant y),$$

puis que X et Y sont indépendantes.

Exercice 40 ●●○○

Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé fini, indépendantes et uniformes sur $[\![1\,,n]\!]$. On pose $M = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$.

1. Calculer $\mathrm{P}(M \geqslant k)$ pour tout $k \in [\![1\,,n]\!]$, puis en déduire la loi de M.
2. Montrer que $\mathrm{P}(\exists i \in [\![1\,,n]\!], X_i = 1) \geqslant 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}$.

Exercice 41 ●●○○

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé fini, indépendantes et de même loi.

1. Calculer $P(X = Y)$ dans le cas où X et Y sont uniformes sur $[\![0\,,n]\!]$, puis dans le cas où X et Y sont binomiales de paramètre $(n, 1/2)$.
2. Comparer les résultats obtenus en **1** lorsque n tend vers $+\infty$. Commentaire ?
3. On note à présent $u_0, \ldots, u_n$ les valeurs communes de X et Y et on pose, pour tout $k \in [\![0\,,n]\!]$, $p_k = \mathrm{P}(X = u_k)$.

   Étudier les variations de la fonction $t \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1-t}{n+1} + tp_k\right)^2$ sur $[0, 1]$, puis en déduire que $\mathrm{P}(X = Y) \geqslant \frac{1}{n+1}$. À quelle condition nécessaire et suffisante cette inégalité est-elle une égalité ? Explication ?

Exercice 42 ●●○○ Mines-Ponts MP 2022

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et $p \in]0\,,1[$. On suppose que $\mathrm{P}(X_n = 1) = p$ et $\mathrm{P}(X_n = -1) = 1 - p$. On pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Montrer que

$$\left(\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \max_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{P}(S_{2n} = k) = \mathrm{P}(S_{2n} = 0)\right) \iff p = \frac{1}{2}.$$

Exercice 43 ●●○○ X MP 2022

Soit b et n des entiers supérieurs ou égaux à 2. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[\![0\,,b-1]\!]$.

1. Soit $i \in [\![1\,,n-1]\!]$. Déterminer la probabilité de $(X_{i+1} < X_i)$.
2. Soit $i, j \in [\![1\,,n-1]\!]$ tels que $i + j \leqslant n$. Déterminer la probabilité de l'événement $(X_{i+j} < X_{i+j-1} < \ldots < X_i)$.

Exercice 44 ●●●○ X MP 2022

1. Soit $n \geqslant 3$ un entier. Montrer que l'équation $x = n \ln x$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}_+^*$, que l'on note a_n et b_n avec $a_n < b_n$.
2. Trouver une suite strictement croissante d'entiers $(p_k)_{k\geqslant 2}$ telle que $p_2 \geqslant 2$, la série $\sum 2^{-(p_{k+1}-p_k)}$ diverge et il existe $C > 0$ tel que, pour tout $k \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{j=p_k}^{p_{k+1}-1} \frac{1}{\ln j} \geqslant C$.
3. Soit $(X_n)_{n\geqslant 2}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires de Rademacher. Que dire de la convergence de $\displaystyle\sum \frac{X_n}{\ln n}$?

Indications

Exercice 24. On pourra s'intéresser à l'événement $(N \geqslant k)$.

Éléments de réponses

Exercice 1. **1.** $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$. **2.** $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$. **2.** $(A_1 \cap \overline{A_2}) \cup (A_2 \cap \overline{A_1})$. **4.** $A_1 \subset A_2$. **5.** $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. **6.** $A_1 \cup A_2 = \Omega$. **7.** $\bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{n\geqslant p} A_n$. **8.** $\bigcap_{p\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{n\geqslant p} A_n$.

Exercice 3. $(a,b) = \left(\frac{1}{2n^2}, -\frac{1}{4n^2}\right)$.

Exercice 5. **1.** $P(A) = \frac{A_5^4}{6^5} = \frac{6!}{6^5} = \frac{5}{54}$.

2. $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{\left|\{1,2,4,5\}^5\right|}{|\Omega|} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{211}{243}$. **3.** $P(C) = P(\overline{A})$.

4. $P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - \frac{\left|\{1,3,5\}^5\right|}{|\Omega|} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{31}{32}$.

5. $E \longrightarrow \overline{E}, (d_1, d_2, \ldots, d_5) \longmapsto (7 - d_1, d_2, \ldots, d_5)$ réalise une bijection, ainsi $P(E) = \frac{1}{2}$.

6. $P(F) = P(B \cap D) = 1 - P(\overline{B} \cup \overline{D}) = \ldots$

Exercice 6. $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0,52 > 0,49 \approx 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24}$.

Exercice 7. $P(\text{Somme} = 9) == \frac{25}{6^3}$ et $P(\text{Somme} = 10) = \frac{27}{6^3}$.

Exercice 8. On se place dans l'univers des 4-combinaisons d'un ensemble à 8 éléments muni de la probabilité uniforme.

1. $P(A) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{8}{4}} = \frac{3}{35}$. **2.** $P(B) = \frac{4 \times \binom{6}{2}}{\binom{8}{4}} = \frac{3}{7}$. **3.** $P(B) - P(A) = \frac{12}{35}$.

Exercice 9. **1.** 3^n. **2.** $(3/4)^n$.

Exercice 11. **1.** $\frac{n!}{n^k(n-k)!}$ pour $k \leqslant n$. **2.** 23 et 41.

Exercice 12. **1.** $A_n = \left(\bigcap_{j=1}^{n-1} N_j\right) \cap \overline{N_n}$ et $P(A_n) = \frac{b!(a+n-1)}{(b-n+1)!N^n}$.

2.b $P(B_0) = \frac{b!}{N^b}$. **2.c** Oui, puisque $(B_l)_{0\leqslant l\leqslant n}$ est un s.c.e.

Exercice 13. **2.a** $1/2$. **2.b** $p_n = \frac{1}{1 + \frac{1}{3^{n-1}}}$. **2.c** $\lim_{n\to+\infty} p_n = 1$.

Exercice 14. **1.** $\frac{1}{2}$. **2.** $\frac{2k}{n(n+1)}$. **3.** $\frac{1}{3} + \frac{1}{6n}$. **4.** $\frac{1}{3}$.

Exercice 15. **1.** $p_1 = \frac{17}{35}$. **3.** $p_n = -\frac{3}{1435}\left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1} + \frac{20}{41}$.

Exercice 16. **1.** $X_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}^\top$. **2.** $M = \frac{3p-1}{2} I_3 + \frac{1-p}{2} J$.

4. $M^n = \left(\frac{3p-1}{2}\right)^n I_3 + \frac{1}{3}\left[1 - \left(\frac{3p-1}{2}\right)^n\right] J$. **5.** $a_n = \left(\frac{3p-1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}\left[1 - \left(\frac{3p-1}{2}\right)^n\right]$ et $b_n = c_n = \frac{1}{3}\left[1 - \left(\frac{3p-1}{2}\right)^n\right]$. **6.** $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{1}{3}$.

Exercice 17. **1.** $P(X = 1) = \frac{n}{n+2}$, $P(X = 2) = \frac{2n}{(n+1)(n+2)}$ et $P(X = 3) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$. **2.** $P(Y = k) = \frac{2(n+2-k)}{(n+1)(n+2)}$ pour $k \in [\![1\,, n+1]\!]$.

Exercice 19. $P\left(\left\lfloor\sqrt{X}\right\rfloor = k\right) = \frac{(k+1)^2 - k^2}{n^2}$ pour $k \in [\![1\,, n]\!]$.

Exercice 20. Posons $Y = \cos\left(\frac{X\pi}{3}\right)$.
$P(Y = 1) = P(Y = -1) = \frac{1}{6}$ et $P\left(Y = \frac{1}{2}\right) = P\left(Y = -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$.

Exercice 21. Préférer le groupe de quatre musiciens si et seulement si $p \geqslant 0,4$.

Exercice 22. $P(X = k)$ est maximal pour $k = \lfloor (n+1)p \rfloor$.

Exercice 23. **1.** $p_n^r = \frac{n+1}{n(r+1)}$. **3.** $q_n^r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^r$. **2.** et **4.** $\lim_{n\to+\infty} p_n^r = \lim_{n\to+\infty} q_n^r = \frac{1}{r+1}$.

Exercice 24. $P(N = k) = \frac{k}{(k+1)!}$, pour $k \in [\![1\,, n-1]\!]$, et $P(N = n) = \frac{1}{n!}$.

Exercice 25. **2.** $1/2$. **1.** En notant $C(\sigma)$ le nombre de cycles disjoints de σ :

$$C(\sigma(i\,j)) = \begin{cases} C(\sigma) & \text{si} \left| \begin{array}{l} i \in \operatorname{supp}(\sigma) \text{ et } j \notin \operatorname{supp}(\sigma) \\ j \in \operatorname{supp}(\sigma) \text{ et } i \notin \operatorname{supp}(\sigma) \\ i, j \text{ dans le même cycle avec } \sigma(i) = j \text{ ou } \sigma(j) = i \end{array} \right. \\ C(\sigma) - 1 & \text{si } i \text{ et } j \text{ dans des cycles distincts.} \\ C(\sigma) + 1 & \text{si} \left| \begin{array}{l} i, j \notin \operatorname{supp}(\sigma) \\ i, j \text{ dans le même cycle avec } \sigma(i) \neq j \text{ et } \sigma(j) \neq i \end{array} \right. \end{cases}$$

Exercice 26. $\Omega = \mathfrak{S}_{\{A,B,C\}}$ muni de la probabilité uniforme.
$P(E) = P(F) = \frac{1}{2}$ et $P(E \cap F) = \frac{1}{3}$.

Exercice 27. **1.** $\frac{\binom{6}{2}}{\binom{12}{8}} = \frac{1}{33}$. **2.** $n \geqslant 23$.

Exercice 29. **1.** si et seulement si $P(A) \in \{0, 1\}$.

Exercice 30. **1.** $\frac{n-2}{\binom{n}{3}}$. **2.** $\frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)}$.

Exercice 31. $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Exercice 32. **1.** $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n, \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}b_n. \end{cases}$ **2.** $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 3^{-n}$ et $b_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times 3^{-n}$

3. $P_{A_i}(A_j) = P(A_{j-i})$.

Exercice 33. **1.** $p_1 = 1$, $p_2 = 3/4$ et $p_3 = 5/8$. **2.** $p_{n+2} = \frac{1}{2}p_{n+1} + \frac{1}{4}p_n$.

Exercice 34. $P(A \subset B) = (3/4)^n$.

Exercice 35. **1.** $2/5$. **2.** $1/10$. **3.** $11/20$. **4.a** $k/10$. **4.b** $(k/10)^2$. **4.c** $P(Z = k) = \left(\frac{k}{10}\right)^2 - \left(\frac{k-1}{10}\right)^2$.

Exercice 36. **1.** $X \sim \mathscr{U}([\![1\,, 6]\!])$ et $Y_{(X=x)} \sim \mathscr{U}([\![1\,, x]\!])$.

2. $P((X,Y) = (x,y)) = \begin{cases} \frac{1}{6x} & \text{si } y \leqslant x \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ **3.** $P(Y = y) = \sum_{x=y}^{6} \frac{1}{6x}$.

Exercice 38. **1.** $P(X + Y = k) = \begin{cases} \frac{k-1}{n^2} & \text{si } k \leqslant n+1 \\ \frac{2n+1-k}{n^2} & \text{si } k \geqslant n+1. \end{cases}$ **2.** $\frac{n-1}{2n^2}$.

Exercice 40. **1.** $P(M \geqslant k) = \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)^n$ et $P(M = k) = \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n$.

Exercice 41. **1.** et **2.** $P(X = Y) = \frac{1}{n+1}$ et $P(X = Y) = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

3. La fonction est croissante sur $[0\,, 1]$, $f(0) = \frac{1}{n+1}$ et $f(1) = P(X = Y)$. Il y a égalité si et seulement si $X, Y \sim \mathscr{U}([\![0\,, n]\!])$.