30 Dénombrement

Cahier de calcul : $\varnothing$. **Banque CCINP :** exercice 11.

Dénombrements divers

Exercice 1 ●○○○

Donner le cardinal des ensembles suivants, puis expliciter tous leurs éléments.

1. $\mathcal{P}(\varnothing)$. **2.** $\mathcal{P}(\{5\})$. **3.** $\mathcal{P}(\{1,4\})$. **4.** $\mathcal{P}(\{1,3,4,5\})$. **5.** $\mathcal{P}(\{\{1\},2,4\})$.

Exercice 2 ●○○○ ☑ Combien existe-t-il de tableaux de 4 lignes et 4 colonnes dont les entrées sont « 0 » ou « 1 » et

1. dont chaque ligne contient exactement un coefficient « 1 » ?
2. dont chaque ligne contient exactement deux coefficients « 1 » ?
3. dont chaque ligne ET chaque colonne contiennent exactement un coefficient « 1 » ?

Exercice 3 ●●○○ ☑

On tire 5 cartes d'un jeu de 52 cartes. On obtient ce qu'on appelle une *main*.

1. Combien y a-t-il de mains possibles ?
2. Combien y a-t-il de mains avec
   - **a.** uniquement des figures ?
   - **b.** deux piques, un cœur et deux carreaux ?
   - **c.** exactement un trèfle ?
   - **d.** au moins un valet ?
   - **e.** au moins une dame et un 9 ?
   - **f.** exactement deux rois et deux cœurs ?

Exercice 4 ●●○○ ☑ Combien y a-t-il de couples (x, y)

1. dans $[\![1\,,n]\!]^2$ pour lesquels $x < y$?
2. dans $[\![1\,,n]\!] \times [\![1\,,2n]\!]$ pour lesquels $x < y$?
3. dans $[\![1\,,n]\!]^2$ pour lesquels $y = x + 1$?
4. dans $[\![1\,,n]\!]^2$ pour lesquels $|x - y| \leqslant 1$?

Exercice 5 ●●○○ ☑ On appelle *diagonale* d'un polygone convexe tout segment joignant deux de ses sommets non consécutifs. Si un polygone convexe possède autant de diagonales que de côtés, combien possède-t-il de côtés ?

Exercice 6 ●○○○ Combien y a-t-il d'anagrammes des mots

1. « MAISON » ? **2.** « RADAR » ? **3.** « MISSISSIPPI » ? **4.** « ABRACADABRA » ?

Exercice 7 ●●○○ ☑

Combien existe-t-il de mots de 9 lettres contenant le mot

1. « MERCI » ? **2.** « QUOI » ? **3.** « OSLO » ?

Exercice 8 ●○○○ ☑ Dans une association de 18 personnes, on organise l'élection d'un comité de 4 membres. Les statuts de l'association interdisent qu'on élise deux conjoint·e·s, or justement il y a un couple et un seul dans l'association.
Combien de comités différents peut-on former dans ces conditions ?

Exercice 9 ●○○○ ☑

On possède 10 billes que l'on veut placer sur une même rangée.

1. On suppose que les 10 billes sont de couleurs différentes.
   De combien de façons peut-on les ranger ?
2. On suppose qu'il y a 5 billes rouges, 2 blanches et 3 vertes.
   - **a.** De combien de façons peut-on les ranger ?
   - **b.** De combien de façons peut-on les ranger si l'on veut que les billes soient groupées par couleurs ?
   - **c.** Même question si l'on souhaite seulement grouper les billes rouges.

Exercice 10 ●●●○ ☑ **Nombre de p-listes croissantes de $[\![1\,,n]\!]$**

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$.

1. Combien y a-t-il de fonctions strictement croissantes de $[\![1\,,p]\!]$ dans $[\![1\,,n]\!]$?
2.
   - **a.** Soit $f : [\![1\,,p]\!] \longrightarrow [\![1\,,n]\!]$ une fonction croissante. Montrer que la fonction $g : k \longmapsto f(k) + k - 1$ est strictement croissante de $[\![1\,,p]\!]$ dans $[\![1\,,n+p-1]\!]$.
   - **b.** Soit $g : [\![1\,,p]\!] \longrightarrow [\![1\,,n+p-1]\!]$ une fonction strictement croissante. Montrer que la fonction $f : k \longmapsto g(k) - k + 1$ est croissante de $[\![1\,,p]\!]$ dans $[\![1\,,n]\!]$.
   - **c.** Combien y a-t-il de fonctions croissantes de $[\![1\,,p]\!]$ dans $[\![1\,,n]\!]$?

Exercice 11 ●●○○ — Banque d'exercices CCINP 2025 (112)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.

1. Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que $A \cap B = \varnothing$.
3. Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in \mathscr{P}(E)^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

Exercice 12 ●●○○ — On considère un ensemble E de cardinal $n \in \mathbb{N}$. On cherche à calculer le nombre de couples (A, B) de parties de E telles que $A \cup B = E$.

1. Combien y a-t-il de parties de E à k éléments ?
2. Soit A une partie à k éléments, $0 \leqslant k \leqslant n$, de E.
   a. Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une partie B de E vérifie $A \cup B = E$.
   b. Dénombrer le nombre de parties B de E telle que $A \cup B = E$.
3. Conclure.

Exercice 13 ●●○○ — Combien existe-t-il de surjections

1. d'un ensemble de cardinal n sur un ensemble de cardinal 2 ?
2. d'un ensemble de cardinal $n+1$ sur un ensemble de cardinal n ?

Exercice 14 ●●○○ — Applications idempotentes (Mines-Ponts MP 2022)
Soit E un ensemble fini et $p : E \longrightarrow E$ une application. On dit que l'application p est *idempotente* lorsque $p \circ p = p$.

1. a. Montrer que si p est idempotente et injective alors $p = \mathrm{Id}_E$.
   b. Montrer que si p est idempotente et surjective alors $p = \mathrm{Id}_E$.
   c. Sur un ensemble à deux éléments, donner un exemple d'application idempotente distincte de l'identité.
2. Montrer que p est idempotente si et seulement si $p(x) = x$, pour tout $x \in p[E]$.
3. Soient a, b, c trois éléments distincts. Donner les trois applications idempotentes de $\{a, b\}$ et les dix applications idempotentes de $\{a, b, c\}$.
4. Soit $n = \operatorname{Card} E$. Dénombrer les applications idempotentes de E.
   Indication : utiliser une partition judicieuse de l'ensemble des applications idempotentes de E en s'appuyant sur la question **2**.

Exercice 15 ●●●○ — On lance 100 fois trois pièces P_1, P_2, P_3. La pièce P_1 donne « face » 70 fois, P_2 50 fois et P_3 56 fois. Les pièces P_1 et P_2 donnent « face » simultanément 31 fois, P_2 et P_3 28 fois.

1. Majorer le nombre de lancers où les trois pièces donnent « pile » simultanément.
2. Minorer le nombre de lancers où l'on obtient 3 fois le résultat « face ».

Exercice 16 ●●●○ — Oral X Un dérangement est une permutation sans point fixe. Y a-t-il plus de dérangements impairs ou de dérangements pairs dans $\mathfrak{S}_n$?

Exercice 17 ●●●○ — Vers le théorème des deux carrés (X MP 2022)
Soit p un nombre premier congru à 1 modulo 4. On considère l'ensemble

$$S = \left\{(a, b, c) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}^* \;\middle|\; 4ab + c^2 = p\right\}.$$

1. Montrer que S est fini non vide.

Soit $S_1 = \{(a, b, c) \in S \mid a > b + c\}$ et $S_2 = \{(a, b, c) \in S \mid a < b + c\}$.

2. Montrer que S est l'union disjointe de S_1 et S_2. Montrer que S_1 et S_2 ont le même cardinal.
3. Soit $g : S_1 \longrightarrow S_1$ définie par $g(a, b, c) = (a-b-c, b, -2b-c)$. À l'aide de g, montrer que S_1 a un cardinal impair.
4. Soit $S_0 = \{(a, b, c) \in S \mid a \neq b\}$. À l'aide de S_0, montrer que p est somme de deux carrés.
5. Montrer qu'un nombre premier impair s'écrivant comme la somme de deux carrés est congru à 1 modulo 4.
6. Montrer qu'un entier naturel non nul dont tous les diviseurs premiers sont congrus à 1 modulo 4 est somme de deux carrés d'entiers.

Exercice 18 ●●●○ — ENS PLSR MP 2023 Soit G un groupe fini. Si X et Y sont deux parties non vides de G, on pose

$$X^{-1} = \left\{x^{-1} \;\middle|\; x \in X\right\} \quad \text{et} \quad XY = \{xy \mid (x, y) \in X \times Y\}.$$

1. On suppose que $|XX| < 2|X|$. Montrer que $XX^{-1} = X^{-1}X$.
2. On suppose que $\left|XX^{-1}\right| < \frac{3}{2}|X|$. Montrer que $X^{-1}X$ est un sous-groupe de G.

Double comptage

Exercice 19 ●●○○ ☑ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$.

1. De combien de façons peut-on choisir simultanément n entiers compris entre 1 et $2n$ dont exactement k sont inférieurs ou égaux à n ?
2. Calculer de deux manières différentes le nombre de n-combinaisons de $[\![1\,,2n]\!]$. En déduire une formule !

Exercice 20 ●●○○ ☑ Soit $p, k \in \mathbb{N}$ et E un ensemble fini de cardinal n.
Calculer de deux manières différentes le nombre de couples (A, B) de parties de E pour lesquels $A \subset B$, $|A| = k$ et $|B| = p$. En déduire une formule !

Exercice 21 ●●●○ **Nombre de surjections**
Soit E et F deux ensembles finis non vides de cardinaux respectifs p et n. On note $S_{p,n}$ le nombre de surjections de E sur F.

1. Déterminer $S_{p,1}$, $S_{n,n}$, et $S_{p,n}$ lorsque $p < n$.
2. On suppose $p > 1$, $n > 1$ et l'on introduit a un élément arbitraire de E. En étudiant la restriction d'une surjection au départ de $E \backslash \{a\}$, établir
$$S_{p,n} = n(S_{p-1,n} + S_{p-1,n-1}).$$
3. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout entier $p \geqslant 1$,
$$S_{p,n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p.$$

Exercice 22 ●●○○ **Nombre de surjections (bis)**

1. Pour tous $j, k, n \in \mathbb{N}$, compléter l'égalité $\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{?}\binom{n-j}{?}$ et en donner une preuve combinatoire.
2. *Formule d'inversion de Pascal.* Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites complexes telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k$. Montrer alors que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a_k.$$
3. En déduire le nombre de surjections d'un ensemble de cardinal p sur un ensemble de cardinal n.

Exercice 23 ●●○○ **Formule de Vandermonde**
Donner une preuve combinatoire de la formule suivante
$$\forall n_1, n_2, p \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{p} \binom{n_1}{k}\binom{n_2}{p-k} = \binom{n_1+n_2}{p}.$$

Principes des tiroirs

Exercice 24 ●○○○ ☑
Combien d'entiers au minimum doit-on sélectionner dans l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 100\}$ pour être sûr que cette sélection inclut deux entiers consécutifs ?

Exercice 25 ●●○○ 💡
Étant donné 6 personnes qui sont deux à deux amies ou ennemies, montrer qu'il en existe toujours trois qui sont soit mutuellement amies, soit mutuellement ennemies.

Ensembles dénombrables

Les deux énoncés suivants découlent de l'argument diagonal de Cantor.

Exercice 26 ●○○○ $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ **n'est pas dénombrable**
Par l'absurde, supposons qu'il existe une bijection $f : \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Notons alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(f(n))_n$ le n-ième terme de la suite $f(n)$ et définissons la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = 1 - (f(n))_n.$$
Aboutir à une contradiction en considérant l'antécédent de $(x_n)_{n\geqslant 0}$ par f.

Exercice 27 ●○○○ Cet exercice vise à montrer qu'il n'existe pas de bijection entre un ensemble E et l'ensemble de ses parties $\mathscr{P}(E)$.
Par l'absurde, supposons qu'il existe une telle bijection $f : E \longrightarrow \mathscr{P}(E)$ et considérons $F = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$. Aboutir à une contradiction en considérant l'antécédent de F par f.

Exercice 28 ●●●○ — Points de discontinuité d'une fonction monotone

1. Soit $f : [a\,,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante, avec $a < b$ deux réels.
Pour $x \in \,]a\,,b[$, on pose $\delta(x) = \lim\limits_{x^+} f - \lim\limits_{x^-} f$.
   - **a.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E_n = \{x \in \,]a\,,b[\mid \delta(x) > 1/n\}$ est fini.
   - **b.** En déduire que l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.
2. Généraliser ce résultat au cas où f est définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 29 ●●●○ — X MP 2022

1. Construire une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont l'ensemble des points de discontinuité est $\mathbb{Q}$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont l'ensemble des points de discontinuité est $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Exercice 30 ●●○○ — Nombres algébriques/transcendants

Un nombre complexe est dit *algébrique* s'il est racine d'un polynôme non nul à coefficients entiers et *transcendant* sinon.

1. Montrer que les nombres rationnels sont algébriques. Qu'en est-il de $\sqrt{2}$?
2. Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.
3. En déduire l'existence de nombres transcendants.

Exemples classiques de nombres transcendants : *le nombre de Liouville* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} 10^{-k!}$ (Liouville, 1844), e (Hermite, 1873) et π (Lindemann, 1882).

Exercice 31 ●●●● — Énumération des rationnels via les suites de Stern

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{1}{1 + 2\lfloor x\rfloor - x}$ et la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ passe par chaque rationnel positif une et une seule fois.
2. Soit f l'application de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$f(1) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f(2n) = f(n) + 1 \;\text{ et }\; f(2n+1) = \frac{1}{f(2n)}.$$
Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{Q}_+^*$.

Exercice 32 ●●○○ — Théorème de Cantor-Bernstein

Pour tout ensemble E, pour toute fonction $f : E \longrightarrow E$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f^n = \overbrace{f \circ \ldots \circ f}^{n \text{ fois}}$ la composée de f avec elle-même n fois et, par convention, $f^0 = \mathrm{Id}_E$. Les fonctions ainsi définies sont appelées les *itérées de f*.

1. Soit E un ensemble et A une partie de E. On suppose qu'il existe une injection f de E dans A. On souhaite montrer qu'il existe alors une bijection de E sur A.
On pose $X = \bigcup\limits_{n\geqslant 0} f^n\big[\,\overline{A}\,\big]$, où $\overline{A}$ désigne le complémentaire de A dans E, et on note φ l'application de E dans E définie par
$$\forall x \in E, \quad \varphi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in X, \\ x & \text{si } x \notin X. \end{cases}$$
   - **a.** Montrer que φ est à valeurs dans A.
   - **b.** Montrer que X est stable par φ, *i.e.* $\varphi[X] \subset X$.
   - **c.** Montrer que φ est injective sur E.
   - **d.** Montrer que φ est surjective de E sur A.
2. En déduire une preuve du théorème de Cantor-Bernstein.

Indications

Exercice 11. **1.** On pourra partitionner l'ensemble de ces couples selon le cardinal de la partie A. **2.** Se ramener à la question **1**. **3.** Se ramener à la question **2**.

Exercice 16. On pourra considérer le déterminant de la matrice $J - I_n$, où J est la matrice dont tous les coefficients valent 1.

Exercice 17. **3.** On pourra s'intéresser au point fixe de g.
4. Commencer par montrer que $|S_0| \equiv 0[4]$.

Exercice 18. **1.** Pour $a, b \in X$, on pourra s'intéresser à l'équation $x^{-1}y = ab^{-1}$, en lien avec les cardinaux des parties du type Xc ou Xc^{-1}.
2. Pour $a, b, c, d \in X$, on pourra montrer qu'il existe $u, v, w \in X$ tels que $a^{-1}b = u^{-1}v$ et $c^{-1}d = v^{-1}w$.

Exercice 25. On pourra s'intéresser à la coloration d'un graphe.

Exercice 29. **1.** Considérer une énumération $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{Q}$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sum\limits_{r_n<x} 2^{-n}$. **2.** Conséquence de l'exercice 28.

Éléments de réponses

Exercice 2. **1.** 4^4. **2.** $\binom{4}{2}^4$. **3.** $4!$.

Exercice 3. **1.** $\binom{52}{5}$. **2.a** $\binom{12}{5}$. **2.b** $\binom{13}{2}\binom{13}{1}\binom{13}{2}$. **2.c** $\binom{13}{1}\binom{39}{4}$. **2.d** $\binom{52}{5} - \binom{48}{5}$.
2.e $\binom{52}{5} - 2\binom{48}{5} + \binom{44}{5}$. **2.f** $\binom{3}{1}\binom{12}{1}\binom{36}{2} + \binom{3}{2}\binom{12}{2}\binom{36}{1}$.

Exercice 4. **1.** $\binom{n}{2}$. **2.** $\binom{n}{2} + n^2$. **3.** $n - 1$. **4.** $3n - 2$.

Exercice 5. Il s'agit d'un pentagone.

Exercice 7. **1.** 5×26^4. **2.** $6 \times 26^5 - 3 \times 26$. **3.** $6 \times 26^5 - 3(26^2 + 26)$.

Exercice 8. $\binom{18}{4} - \binom{16}{2} = 2\binom{16}{3} + \binom{16}{4} = 2940$.

Exercice 9. **1.** $10!$. **2.a.** $\binom{10}{5}\binom{5}{3}$. **2.b.** $3!$. **2.c.** $6\binom{5}{3}$.

Exercice 10. **1.** $\binom{n}{p}$. **2.c** $\binom{n+p-1}{p}$.

Exercice 11. $a = b = c = 3^n$.

Exercice 12. **3.** 3^n.

Exercice 13. **1.** $2^n - 2$. **2.** $\dfrac{n(n+1)!}{2}$.

Exercice 15. **1.** $\leqslant 11$. **2.** $\geqslant 9$.

Exercice 16. La différence entre le nombre de dérangements pairs et le nombre de dérangements impairs dans $\mathfrak{S}_n$ est $(-1)^{n-1}(n-1)$.

Exercice 19. **1.** $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$.

Exercice 20. $\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{n}{p}\binom{p}{k}$.

Exercice 24. 51.