

29 | Déterminants

Cahier de calcul : fiche 31.

Banque CCINP : \emptyset .

Calculs de déterminants

— **Exercice 1** ●○○○ — Soit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Factoriser les déterminants suivants.

$$1. \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}, \quad 2. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix},$$

$$3. \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}, \quad 4. \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}, \quad 5. \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b^2+c^2 & c^2+a^2 & a^2+b^2 \\ b^3+c^3 & c^3+a^3 & a^3+b^3 \end{vmatrix}.$$

— **Exercice 2** ●○○○ — Soit $a, b, x, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$.

Calculer les déterminants suivants.

$$1. \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \end{vmatrix}, \quad 2. \begin{vmatrix} & & & a_n \\ & & \ddots & \\ & & & \\ a_1 & & & \end{vmatrix}, \quad 3. \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

$$4. \begin{vmatrix} 1+x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+x \end{vmatrix}_{[n]}, \quad 5. \begin{vmatrix} a+b & a & \cdots & a \\ a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}_{[n]}$$

$$6. \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{[n]}, \quad 7. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{[n]}$$

— **Exercice 3** ●○○○ — Calculer les déterminants suivants.

$$1. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad 2. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad 3. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 7 & 1 \end{vmatrix}.$$

— **Exercice 4** ●○○○ — Calculer $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$.

— **Exercice 5** ●○○○ — Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer une expression de Δ_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ où

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 \cos \theta & 1 & & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2 \cos \theta \end{vmatrix}.$$


— **Exercice 6** ●○○○ — Centrale MP 2022

- Rappeler la formule de développement d'un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne. En déduire, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une relation entre A , $\text{Com}(A)$ et $\det(A)$.
- Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad a_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } |i - j| = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer $\det(A)$.

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs, dont les autres coefficients sont négatifs et tels que $\sum_{j=1}^n a_{i,j} > 0$, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
 - Montrer que la matrice A est inversible.
 - Montrer que les coefficients de A^{-1} sont positifs.

— **Exercice 7** ●●○○ —  Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq b$. Pour tout $x \in \mathbb{C}$, calculer

$$D(x) = \begin{vmatrix} c+x & a+x & \cdots & a+x \\ b+x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a+x \\ b+x & \cdots & b+x & c+x \end{vmatrix}_{[n]}.$$

— **Exercice 8** ●●○○ —

1. Que peut-on dire de l'inversibilité d'une matrice antisymétrique ?
2. Soit $A \in \mathcal{A}_{2n}(\mathbb{C})$ antisymétrique et $x \in \mathbb{C}$. On note J la matrice carrée de taille $2n$ dont tous les coefficients valent 1.

a. Déterminer la valeur de $\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & & & \\ \vdots & & A & \\ -1 & & & \end{vmatrix}.$

b. En déduire que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -x & & & \\ \vdots & & A & \\ -x & & & \end{vmatrix} = \det A.$

c. En déduire que $\det(A + xJ) = \det(A).$

— **Exercice 9** ●●○○ — Soit $n \in \mathbb{N}$ et P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré k avec $n \geq k + 2$. Montrer que le déterminant d'ordre n

$$D = \begin{vmatrix} P(1) & P(2) & \cdots & P(n) \\ P(2) & P(3) & \cdots & P(n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P(n) & P(n+1) & \cdots & P(2n-1) \end{vmatrix}$$

est nul. On pourra utiliser l'application Δ définie par $\Delta(P) = P(X) - P(X-1)$.

— **Exercice 10** ●●○○ —  **Matrice de Vandermonde incomplète**

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, calculer le déterminant

$$D_k = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{k-1} & x_1^{k+1} & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{k-1} & x_n^{k+1} & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

— **Exercice 11** ●●○○ — Retrouver l'expression du déterminant de Vandermonde en utilisant uniquement des opérations élémentaires.

— **Exercice 12** ●●○○ —  **Déterminant d'une matrice circulante**

1. Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$. On pose

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}.$$

- a. Montrer que $\det(J) \neq 0$.
 - b. Calculer $\det(MJ)$ et en déduire $\det(M)$.
2. Même question avec la matrice, dite *circulante*,

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \left(\omega^{(i-1)(j-1)} \right)_{1 \leq i, j \leq n},$$

où $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ et $\omega = e^{2i\pi/n}$.

— **Exercice 13** ●●○○ —  **Mines-Ponts MP 2022**

1. Soit $m \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_m[X]$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(mx) = P(\cos x).$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Calculer le déterminant de la matrice


$$\left(\cos((k-1)a_l) \right)_{1 \leq k, l \leq n}.$$

— **Exercice 14** ●●○○ —  **Mines-Ponts MP 2022**

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, a_1, \dots, a_p des réels non tous nuls et $b_1 < \dots < b_p$.

Montrer que $f_p : x \mapsto \sum_{i=1}^p a_i e^{b_i x}$ s'annule au plus $p-1$ fois.

2. Soit $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$ et $\beta_1 < \dots < \beta_n$ des réels. Montrer que $\det(e^{\alpha_i \beta_j})_{1 \leq i, j \leq n} > 0$.

— **Exercice 15** ●○○○ —  Soit n et p deux entiers non nuls avec $n > p$. Que vaut $\det(AB)$ pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$?

— **Exercice 16** ●○○ — Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'égalité

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \det(A + B) \det(A - B).$$

— **Exercice 17** ●○○ — **Mines-Ponts MP 2022** Soit $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On pose $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et on suppose que A et C commutent. Montrer l'égalité

$$\det(M) = \det(AD - CB)$$

en se limitant au cas A inversible (le cas général – A quelconque – nécessite le programme de 2^e année a priori).

— **Exercice 18** ●○○ —

1. Soit $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Quel produit matriciel pour transformer $\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} A + 2B & C + 2D \\ B & D \end{pmatrix}$?

Comparer leurs déterminants.

2. Montrer que, pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\begin{vmatrix} I_n & B \\ A & I_n \end{vmatrix} = \det(I_n - AB) = \det(I_n - BA).$$

— **Exercice 19** ●○○ — **🔗 Mines-Ponts MP 2022**

1. Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$. Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.

2. Trouver A et B dans $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$ et $\det(A^2 + B^2) = 0$.

3. Trouver A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\det(A^2 + B^2) < 0$.

— **Exercice 21** ●○○ — **🔗 Un critère d'inversibilité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\det(A)$ pour que A soit inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

Déterminants d'un endomorphisme

— **Exercice 22** ●○○ — **🔗 Mines-Ponts MP 2022**

Calculer le déterminant et la trace de l'endomorphisme $A \mapsto A^\top$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

— **Exercice 23** ●○○ —

1. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Que peut-on dire de $\dim E$ si $f^2 = -\text{Id}_E$?

2. a. Proposer un exemple d'endomorphisme f de \mathbb{R}^2 pour lequel $f^2 = -\text{Id}_{\mathbb{R}^2}$.

b. Même question avec \mathbb{R}^{2n} à la place de \mathbb{R}^2 .

3. Proposer un exemple d'endomorphisme f de \mathbb{C}^n pour lequel $f^2 = -\text{Id}_{\mathbb{C}^n}$.

— **Exercice 24** ●○○ — **🔗 Mines-Ponts MP 2022** Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

On suppose qu'il existe une base \mathcal{B} de \mathbb{R}^2 de la forme $(x, f(x))$ et qu'il existe un entier $n \geq 2$ tel que $f^n = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$.

1. Montrer que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ s'écrit sous la forme $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$ avec $a = \pm 1$.

2. On admet le résultat de cette question qui relève du programme de deuxième année et on pourra vérifier que P est un polynôme annulateur de $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Montrer que $P = X^2 - bX - a$ divise $X^n - 1$ et que P est à racines simples dans \mathbb{C} .

3. On suppose que les racines de P sont complexes non réelles. Déterminer a et montrer que $b \in]-2, 2[$. On pose $\theta = \text{Arccos}(b/2)$, exprimer f^k en fonction de $f, \text{Id}_{\mathbb{R}^2}, k$ et θ .

— **Exercice 25** ●○○ — Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $u, v \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que u et v commutent et que v est nilpotent.

1. Montrer que $\text{Im } v$ est stable par u .

2. En déduire la forme des matrices de u et v dans une base de E adaptée à $\text{Im } v$.

3. Montrer par récurrence sur n que $\det(u + v) = \det(u)$.

Applications

— **Exercice 26** ●○○ — **Formules de Cramer** Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{K}^n$.

On note Y l'unique solution du système $AX = B$. Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, en notant A_j la matrice obtenue en remplaçant la j^{e} colonne de A par B , montrer que $Y_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$.

— **Exercice 27** ●●○○ — **Deux matrices réelles semblables sur \mathbb{C} le sont sur \mathbb{R}**

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A et B sont semblables sur \mathbb{C} .

1. Montrer qu'il existe deux matrices $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour lesquelles la matrice $U + iV$ est inversible et pour lesquelles $AU = UB$ et $AV = VB$.
2. Montrer que la fonction $z \mapsto \det(U + zV)$ de \mathbb{C} dans \mathbb{C} est polynomiale et non identiquement nulle.
3. En déduire que A et B sont semblables sur \mathbb{R} .

— **Exercice 28** ●●○○ —

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients entiers.

1. Montrer que $\det(M)$ est un entier relatif, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.
2. a. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $a_{ij} \equiv b_{ij} [p]$, pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Comparer $\det(A)$ et $\det(B)$.
b. La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ est-elle inversible?
3. Soit $p \in \mathbb{P}$. On note M la matrice carrée de taille p définie par $m_{ij} = \binom{p}{|j-i|}$, pour tous $i, j \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Montrer que M est inversible en raisonnant modulo p .
4. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. On suppose que les coefficients diagonaux de M sont nuls et que ses autres coefficients valent tous ± 1 .
a. Calculer $\det(M)$ modulo 2.
b. En déduire que $\dim(\text{Ker } M) \leq 1$.
5. On se donne de $2n + 1$ objets de masses inconnues x_1, \dots, x_{2n+1} et on suppose que quand on met de côté l'un quelconque de ces objets, il est toujours possible de séparer les $2n$ objets restants en deux tas de n objets de masses totales identiques. Que peut-on dire des masses x_1, \dots, x_{2n+1} ?

— **Exercice 29** ●●○○ — **X MP 2022**

Soit n un entier naturel pair et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de diagonale nulle et dont tout coefficient hors-diagonale vaut 1 ou -1 . Montrer que M est inversible.

— **Exercice 30** ●○○○ — **Équation cartésienne d'un plan**

1. Justifier que l'ensemble F des triplets (x, y, z) de \mathbb{R}^3 qui vérifient $x + y - z = 0$ est un espace vectoriel et en donner la dimension et une base.
2. On pose $u = (1, 1, -1)$, $v = (2, 0, 1)$ et $F = \text{Vect}(u, v)$. À l'aide du déterminant, expliciter trois réels a, b et c tels que F soit l'ensemble des triplets (x, y, z) de \mathbb{R}^3 qui vérifient $ax + by + cz = 0$.

— **Exercice 31** ●●○○ — **Alignement et cocyclicité**

1. Soit M_1, M_2 et M_3 trois points du plan \mathbb{R}^2 avec $M_i = (x_i, y_i)$, pour tout $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$.
a. Quelle est l'équation générale d'une droite affine de \mathbb{R}^2 ?
b. Montrer que M_1, M_2 et M_3 sont alignés si et seulement si $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$.
2. Soit M_1, M_2, M_3 et M_4 quatre points du plan \mathbb{R}^2 avec $M_i = (x_i, y_i)$, pour $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$.
a. Montrer que tout cercle de \mathbb{R}^2 a une équation de la forme $x^2 + y^2 + bx + cy + d = 0$ avec $b, c, d \in \mathbb{R}$. Réciproquement, à quelle condition nécessaire et suffisante une telle équation décrit-elle un cercle?
b. Montrer que M_1, M_2, M_3 et M_4 sont cocycliques ou alignés si et seulement si

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Divers

— **Exercice 32** ●●○○ — Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients tous égaux à 1 ou -1 . Montrer que $\det M$ est un entier divisible par 2^{n-1} .

— **Exercice 33** ●●○○ — Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n non nulle, $f \in \mathcal{L}(E)$ et \mathcal{B} une base de E . Montrer que, pour tous $x_1, \dots, x_n \in E$,

$$\sum_{k=1}^n \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{k-1}, f(x_k), x_{k+1}, \dots, x_n) = \text{tr}(f) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

— **Exercice 34** ●●○○ — **Quelques propriétés de la comatrice**

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

1. Déterminer le rang de $\text{Com } A$ en fonction de celui de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, montrer que

$$\det(\text{Com } A) = (\det A)^{n-1}.$$

3. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, montrer que

$$\text{Com}(\text{Com } A) = (\det A)^{n-2} A.$$

— **Exercice 35** ●●○○ — ♪☑ Soit A une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'équation $A = \text{Com}(X)$.

— **Exercice 36** ●●●○ — ♪ Mines-Ponts MP 2022

Soit $n \geq 2$. On note \mathcal{D} l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad i - j \equiv 1 [2] \implies m_{i,j} = 0.$$

1. Montrer que \mathcal{D} est un sous-anneau et un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Soit $M \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $M \in \mathcal{D}$ si et seulement si $\text{Com}(M) \in \mathcal{D}$.

— **Exercice 37** ●●●○ — ♪☑ ENS PLSR MP 2022 Calculer $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \frac{\varepsilon(\sigma)}{v(\sigma) + 1}$,
où, pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature de σ et $v(\sigma)$ son nombre de points fixes.

— **Exercice 38** ●●●● — ♪ ENS PLSR MP 2022

On note $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices de déterminant 1 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si φ est un morphisme de groupes de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ dans $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ montrer que φ est à valeurs dans $\text{SL}_n(\mathbb{R})$.

Indications

- Exercice 5.** Déterminer une relation de récurrence linéaire vérifiée par la suite $(\Delta_n)_{n \geq 1}$.
- Exercice 7.** On pourra commencer par montrer que D est une fonction affine.
- Exercice 10.** On pourra relier D_k à un mineur d'un déterminant bien choisi.
- Exercice 12. 1.** On pourra introduire $P = a + bX + cX^2$ et exprimer les coefficients de MJ à l'aide de certaines évaluations de P , en ayant au préalable factorisé dans chaque colonne par un nombre complexe *ad hoc*.
- Exercice 13. 2.** On pourra s'intéresser au degré et au coefficient dominant du polynôme obtenu à la question 1 et se ramener à un déterminant de Vandermonde.
- Exercice 14. 1.** On pourra procéder par récurrence. **2.** Commencer par établir que $\det(e^{\alpha_i \beta_j})_{1 \leq i, j \leq n} \neq 0$, puis procéder par récurrence.
- Exercice 19. 1.** Comment factorise-t-on $a^2 + b^2$ dans \mathbb{C} ?
- Exercice 22.** On pourra se rappeler que la transposition est une involution...
- Exercice 24. 3.** P est un polynôme annulateur de f .
- Exercice 29.** On pourra raisonner modulo 2.
- Exercice 32.** Comment faire apparaître des multiples de 2 par opérations élémentaires ?
- Exercice 33.** Il est temps de se remémorer le théorème 10!
- Exercice 35.** On pourra exploiter les résultats de l'exercice 34.
- Exercice 36.** On pourra introduire la matrice $J = \text{diag}(1, -1, 1, -1, \dots)$ et s'intéresser au produit JMJ , pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- Exercice 37.** On pourra faire apparaître une intégrale et se ramener à un calcul de déterminant.
- Exercice 38.** On peut commencer par montrer, en s'inspirant de l'algorithme du pivot, que les matrices $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$ engendrent $\text{SL}_2(\mathbb{R})$, puis réaliser ces matrices comme des commutateurs, *i.e.* des produits de la forme $ABA^{-1}B^{-1}$, en s'aidant de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Éléments de réponses

- Exercice 1. 1.** $(a + b + c)^3$. **2.** 0. **3.** $(a + b - 2c)(a + b + 2c)(a - b)^2$.
4. $(a - b)(a - c)(a - d)(b - c)(b - d)(c - d)$. **5.** $2abc(a - b)(b - c)(c - a)$.
- Exercice 2. 1.** $a_1(a_1 - a_2)^{n-1}$. **2.** $(-1)^{n(n-1)/2} a_1 \dots a_n = (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} a_1 \dots a_n$.
3. $a_1(a_2 - a_1)(a_3 - a_2) \dots (a_n - a_{n-1})$. **4.** $(x + n)x^{n-1}$. **5.** $(na + b)b^{n-1}$. **6.** $1 + (-1)^{n+1}$.
7. $2 - n$.
- Exercice 3. 1.** $\det = -1$. **2.** $\det = 96$. **3.** $\det = 186$.
- Exercice 4.** $\det = -29\,400\,000$.
- Exercice 5.** $\Delta_n = \begin{cases} (n+1) & \text{si } \theta \equiv 0 [2\pi] \\ (-1)^n(n+1) & \text{si } \theta \equiv \pi [2\pi] \\ \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta} & \text{sinon.} \end{cases}$
- Exercice 6. 2.** $\det(A) = n + 1$.
- Exercice 7.** $D(x) = \frac{1}{b-a}(((c-a)^n - (c-b)^n)x + b(c-a)^n - a(c-b)^n)$.
- Exercice 10.** $D_k = \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{n-k} \leq n} x_{i_1} \dots x_{i_{n-k}} \right) \times \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.
- Exercice 12. 1.b.** $\det M = P(1)P(j)P(j^2)$, où $P = a + bX + cX^2$.
2. $\det(M) = \prod_{k=0}^{n-1} P(w^k)$, où $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}X^k$.
- Exercice 13. 1.** $T_m = \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \binom{m}{2k} (X^2 - 1)^k X^{m-2k}$ (*m* e polynôme de Tchebychev).
2. $2^{(n-1)(n-2)/2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\cos(a_j) - \cos(a_i))$.
- Exercice 15.** $\det(AB) = 0$.
- Exercice 21.** $\det(A) = \pm 1$, *i.e.* $\det(A) \in \text{U}(\mathbb{Z})$.
- Exercice 22.** $(-1)^{n(n-1)/2}$.
- Exercice 24. 3.** $a = -1$, les racines de P sont $e^{\pm i\theta}$ et, pour tout $k \geq 1$, $f^k = \frac{\sin(k\theta)}{\sin \theta} f - \frac{\sin((k-1)\theta)}{\sin \theta} \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$.
- Exercice 28. 2.a** $\det(A) \equiv \det(B) [p]$. **2.b** M inversible, car $\det(M) \not\equiv 0 [3]$.
3. $\det(M) \equiv \det(I_p) \equiv 1 [p]$. **4.a** $\det(M) \equiv (n-1) [2]$. **5.** $x_1 = \dots = x_{2n+1}$.
- Exercice 30. 2.** $x - 3y - 2z = 0$.
- Exercice 34. 1.** $\text{rg}(\text{Com } A) = \begin{cases} n & \text{si } \text{rg } A = n \\ 1 & \text{si } \text{rg } A = n - 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
- Exercice 35.** L'ensemble des solutions est $\left\{ \frac{\lambda}{\det A} \text{Com } A \mid \lambda \in \mathbb{K} \text{ et } \lambda^{n-1} = \det A \right\}$.
- Exercice 37.** $(-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$.