28 Le groupe symétrique

Cahier de calcul : fiche 30. **Banque CCINP :** $\varnothing$.

Exercice 1 ●○○○ ☑

1. On pose $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 7 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 7 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.
   Écrire $\sigma\theta$ et σ^{-1} comme des produits de cycles disjoints.
2. Écrire la permutation $(1\,2)(2\,4\,6\,5)(1\,3\,7)(2\,5\,4)(3\,5\,6\,1)(2\,5)(1\,4\,6)$ comme un produit de cycles disjoints.
3. Calculer la signature des permutations $(1\,3\,4)(2\,4\,3\,1)(2\,3)$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 2 & 1 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 ●○○○ ☑

Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 9 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Décomposer σ en produit de cycles disjoints, puis en un produit de transpositions.
2. Calculer la signature de σ.
3. Calculer σ^{2026}.

Exercice 3 ●●○○ ☑

1. Soit $n \geqslant 4$ et $a, b, c, d \in [\![1\,,n]\!]$ tous distincts. Que vaut $(a\,b)(c\,d)(d\,a)$?
2. Que dire d'une permutation de $\mathfrak{S}_n$ possédant au moins $n-1$ points fixes ?
3. Une permutation σ telle que $\sigma^2 = \mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}$ est-elle nécessairement une transposition ?
4. Énumérer tous les éléments de $\mathfrak{S}_4$.

Exercice 4 ●●○○ ☑

Soit $n \geqslant 1$. Déterminer la signature de la permutation

$$\sigma_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 ●●○○ — Description de la signature par les inversions

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On appelle *inversion de* σ tout couple $(i,j) \in [\![1\,,n]\!]^2$ tel que $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$ et on note $\mathrm{Inv}(\sigma)$ le nombre d'inversion de σ. Montrer que $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\mathrm{Inv}(\sigma)}$.

Exercice 6 ●○○○ ☑

Soit $n \geqslant 2$ et $k \in [\![2\,,n]\!]$.
Combien de k-cycles le groupe $\mathfrak{S}_n$ possède-t-il ?

Exercice 7 ●●○○

Soit E un ensemble de cardinal n. Montrer que les groupes $\mathfrak{S}(E)$ et $\mathfrak{S}_n$ sont isomorphes.

Exercice 8 ●○○○ ☑

À quelle condition sur n le groupe $\mathfrak{S}_n$ est-il abélien ?

Exercice 9 ●●○○ ☑ Centre du groupe symétrique

Soit $n \geqslant 3$.

1. Soit $a, b \in [\![1\,,n]\!]$ distincts et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Quelle est la permutation $\sigma(a\,b)\sigma^{-1}$?
2. On appelle centre du groupe symétrique l'ensemble des permutations qui commutent avec toutes les autres. Déterminer le centre de $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 10 ●●●○

1. Démontrer le théorème de décomposition d'une permutation en produit de transposition (théorème 13) par récurrence sur le degré n de $\mathfrak{S}_n$.
2. Démontrer l'existence et l'unicité de la décomposition en cycles disjoints d'une permutation σ (théorème 11) par récurrence forte décroissante sur le nombre d'éléments de $[\![1\,,n]\!]$ fixés par σ.

Exercice 11 ●●○○ — Parties génératrices de $\mathfrak{S}_n$

1. Montrer que toute permutation de $[\![1\,,n]\!]$ peut être décomposée comme un produit de transpositions $\big(1 \ i\big)$, i décrivant $[\![2\,,n]\!]$.
2. En déduire que toute permutation de $[\![1\,,n]\!]$ peut être décomposée comme un produit de transpositions $\big(i \ \ i+1\big)$, i décrivant $[\![1\,,n-1]\!]$.
3. En déduire enfin que toute permutation de $[\![1\,,n]\!]$ est un produit des permutations $(1\,2)$ et $(1\,2\ldots n)$.

Exercice 12 ●●○○ — Les 3-cycles engendrent $\mathfrak{A}_n$

1. Justifier que $\mathfrak{A}_n$ est de cardinal $\dfrac{n!}{2}$.
2. On suppose $n \geqslant 3$.
   a. Vérifier que l'on a $\big(a \ b\big)\big(c \ d\big) = \big(a \ c \ b\big)\big(a \ c \ d\big)$, avec $\{a,b\} \neq \{c,d\}$.
   b. En déduire que tout élément de $\mathfrak{A}_n$ est un produit de 3-cycles.

Exercice 13 ●●○○ — Éléments conjugués

Deux éléments g et g' d'un groupe G sont dits *conjugués* lorsqu'il existe h dans G tel que $g' = hgh^{-1}$.

1. Simplifier $\sigma\big(a_1\ \cdots\ a_p\big)\sigma^{-1}$, pour tous $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $a_1, \dots, a_p \in [\![1\,,n]\!]$ distincts, avec $p \geqslant 2$.
2. **a.** Soit $p \geqslant 2$. Montrer que les p-cycles sont conjugués dans $\mathfrak{S}_n$.
   b. En déduire que la signature est l'unique morphisme non triviale de $\mathfrak{S}_n$ dans $\{\pm 1\}$, pour tout $n \geqslant 2$.
3. Montrer que toute transposition de $\mathfrak{S}_n$ est conjuguée d'une transposition de la forme $\big(i\ \ i+1\big)$, où $i \in [\![1\,,n-1]\!]$.
4. Montrer que les 3-cycles sont conjugués dans $\mathfrak{A}_n$ dès que $n \geqslant 5$.

Exercice 14 ●●○○ — Matrices de permutation

Pour toute permutation σ de $[\![1\,,n]\!]$, on note P_σ la matrice $\big(\delta_{i,\sigma(j)}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, appelée *la matrice de permutation associée à* σ.

1. Montrer que, pour tous $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n$, $P_\sigma P_{\sigma'} = P_{\sigma\sigma'}$.
2. En déduire que, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, P_σ est inversible et préciser son inverse.
3. Montrer que l'application $\sigma \longmapsto P_\sigma$ est un morphisme injectif de groupes de $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 15 ●●●○ — Action de $\mathfrak{S}_n$ sur l'ensemble des partitions de $[\![1\,,n]\!]$ (Centrale MP 2022)

On note π_n le nombre de partitions de $[\![1\,,n]\!]$. Si $\mathcal{P}$ est une telle partition et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $\sigma \cdot \mathcal{P}$ la partition de $[\![1\,,n]\!]$ formée des parties $\sigma[A]$ pour $A \in \mathcal{P}$.

1. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ fixée. Pour $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux partitions de $[\![1\,,n]\!]$, on pose $\mathcal{P} \sim \mathcal{Q}$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathcal{Q} = \sigma^k \cdot \mathcal{P}$. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
2. On suppose ici que σ est un p-cycle, avec p premier. Montrer que les classes d'équivalence sont de cardinal 1 ou p.
3. Soit p premier. On considère ici les partitions de $[\![1\,,n+p]\!]$ et on note σ le p-cycle $\big(1\ 2\ \dots\ p\big)$. Montrer que si $\sigma \cdot \mathcal{P} = \mathcal{P}$, alors soit $[\![1\,,p]\!]$ est inclus dans une partie A de la partition $\mathcal{P}$, soit tous les singletons $\{1\}, \dots, \{p\}$ sont dans la partitions $\mathcal{P}$. En déduire que $\pi_{n+p} \equiv \pi_n + \pi_{n+1}\,[p]$.

Exercice 16 ●●●● — Théorème de Brauer (X MP 2022)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note P_σ la matrice de permutation associée à σ (dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$). Si σ et σ' sont dans $\mathfrak{S}_n$, montrer que σ et σ' sont conjuguées dans $\mathfrak{S}_n$ si et seulement si P_σ et $P_{\sigma'}$ sont semblables.

(Le sens réciproque (théorème de Brauer) est vraiment difficile !)

Exercice 17 ●●●● — Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on pose $A_n(\sigma) = \sum_{i=1}^{n-1} \sigma(i)\sigma(i+1)$.

Déterminer le maximum $\max_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}(A_n(\sigma))$.

Indications

Exercice 17. On peut établir que la suite des maximums $\left(\max_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}(A_n(\sigma))\right)_{n\geqslant 1}$ satisfait la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \max_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}(A_n(\sigma)) = \max_{\sigma\in\mathfrak{S}_{n-1}}(A_{n-1}(\sigma)) + n^2 - 2.$$

Éléments de réponses

Exercice 1. **1.** $\sigma\theta = (1\ 2)(3\ 4\ 6)$ et $\sigma^{-1} = (1\ 4\ 2)(3\ 5\ 6\ 7)$. **2.** $(1\ 4\ 3\ 6\ 7\ 2\ 5)$.
3. $\varepsilon((1\,3\,4)(2\,4\,3\,1)(2\,3)) = 1$ et $\varepsilon\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 2 & 1 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}\right) = -1$.

Exercice 2. **1.** $\sigma = (1\ 4\ 7\ 8)(2\ 6\ 5)(3\ 9) = (1\ 4)(4\ 7)(7\ 8)(2\ 6)(6\ 5)(3\ 9)$.
2. $\varepsilon(\sigma) = 1$. **3.** $\sigma^{2026} = (1\ 4\ 7\ 8)^{r_1}(2\ 6\ 5)^{r_2}(3\ 9)^{r_3}$, où r_1 (resp. r_2, resp r_3) est le reste de la division euclidienne de 2026 par 4 (resp. 3, resp. 2).

Exercice 3. **1.** $(a\ c\ d\ b)$. **2.** C'est l'identité. **3.** Non, *e.g.* $(1\ 2)(3\ 4)$.

Exercice 4. $\varepsilon(\sigma_n) = (-1)^{n(n-1)/2} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 0 \text{ ou } 1\,[4] \\ -1 & \text{si } n \equiv 2 \text{ ou } 3\,[4]. \end{cases}$

Exercice 6. $\dfrac{n!}{k(n-k)!}$.

Exercice 8. $n \in \{1, 2\}$.

Exercice 9. **1.** $(\sigma(a)\ \sigma(b))$. **2.** $\{\mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}\}$.

Exercice 13. **1.** $(\sigma(a_1)\ \cdots\ \sigma(a_p))$. **3.** Si $j \neq i+1$, $(i\ j) = (i+1\ j)(i\ i+1)(i+1\ j)$.

Exercice 17. $\max_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}(A_n(\sigma)) = \dfrac{(n-1)(2n^2+5n-6)}{6}$.