28 | Le groupe symétrique

Cahier de calcul : fiche 30.

Banque CCINP : $\emptyset$.

— Exercice 1 ●○○○ —

1. On pose $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 7 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 7 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Écrire $\sigma\theta$ et σ^{-1} comme des produits de cycles disjoints.

2. Écrire la permutation $(12)(2465)(137)(254)(3561)(25)(146)$ comme un produit de cycles disjoints.

3. Calculer la signature des permutations $(134)(2431)(23)$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 2 & 1 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

— Exercice 2 ●○○○ — Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 9 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints, puis en un produit de transpositions.

2. Calculer la signature de σ .

3. Calculer σ^{2025} .

— Exercice 3 ●●○○ —

1. Soit $n \geq 4$ et $a, b, c, d \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tous distincts. Que vaut $(ab)(cd)(da)$?

2. Que dire d'une permutation de $\mathfrak{S}_n$ possédant au moins $n - 1$ points fixes ?

3. Une permutation σ telle que $\sigma^2 = \text{Id}_{\mathfrak{S}_n}$ est-elle nécessairement une transposition ?

4. Énumérer tous les éléments de $\mathfrak{S}_4$.

— Exercice 4 ●●○○ — Soit $n \geq 1$. Déterminer la signature de la permutation

$$\sigma_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

— Exercice 5 ●●○○ — Description de la signature par les inversions

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On appelle *inversion* de σ tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$ et on note $\text{Inv}(\sigma)$ le nombre d'inversion de σ . Montrer que $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\text{Inv}(\sigma)}$.

— Exercice 6 ●○○○ — Soit $n \geq 2$ et $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$.

Combien de k -cycles le groupe $\mathfrak{S}_n$ possède-t-il ?

— Exercice 7 ●●○○ —

Soit E un ensemble de cardinal n . Montrer que les groupes $\mathfrak{S}(E)$ et $\mathfrak{S}_n$ sont isomorphes.

— Exercice 8 ●○○○ — À quelle condition sur n le groupe $\mathfrak{S}_n$ est-il abélien ?

— Exercice 9 ●●○○ — Centre du groupe symétrique Soit $n \geq 3$.

1. Soit $a, b \in \llbracket 1, n \rrbracket$ distincts et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Quelle est la permutation $\sigma(ab)\sigma^{-1}$?

2. On appelle centre du groupe symétrique l'ensemble des permutations qui commutent avec toutes les autres. Déterminer le centre de $\mathfrak{S}_n$.

— Exercice 10 ●●●○ —

1. Démontrer le théorème de décomposition d'une permutation en produit de transposition (théorème 12) par récurrence sur le degré n de $\mathfrak{S}_n$.

2. Démontrer l'existence et l'unicité de la décomposition en cycles à supports disjoints d'une permutation σ (théorème 10) par récurrence forte décroissante sur le nombre d'éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$ fixés par σ .

— Exercice 11 ●●○○ — Parties génératrices de $\mathfrak{S}_n$

1. Montrer que toute permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ peut être décomposée comme un produit de transpositions $(1 i)$, i décrivant $\llbracket 2, n \rrbracket$.

2. En déduire que toute permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ peut être décomposée comme un produit de transpositions $(i i + 1)$, i décrivant $\llbracket 1, n - 1 \rrbracket$.

3. En déduire enfin que toute permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ est un produit des permutations (12) et $(12 \dots n)$.

— Exercice 12 ●●○○ — Les 3-cycles engendrent $\mathfrak{A}_n$

1. Justifier que $\mathfrak{A}_n$ est de cardinal $\frac{n!}{2}$.

2. On suppose $n \geq 3$.

a. Vérifier que l'on a $(ab)(cd) = (acb)(acd)$, avec $\{a, b\} \neq \{c, d\}$.

b. En déduire que tout élément de $\mathfrak{A}_n$ est un produit de 3-cycles.

— **Exercice 13** ●●○○ — **Éléments conjugués**

Deux éléments g et g' d'un groupe G sont dits *conjugués* lorsqu'il existe h dans G tel que $g' = hgh^{-1}$.

- Simplifier $\sigma(a_1 \cdots a_p)\sigma^{-1}$, pour tous $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $a_1, \dots, a_p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ distincts, avec $p \geq 2$.
- Soit $p \geq 2$. Montrer que les p -cycles sont conjugués dans $\mathfrak{S}_n$.
 - En déduire que la signature est l'unique morphisme non triviale de $\mathfrak{S}_n$ dans $\{\pm 1\}$, pour tout $n \geq 2$.
- Montrer que toute transposition de $\mathfrak{S}_n$ est conjuguée d'une transposition de la forme $(i \ i + 1)$, où $i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$.
- Montrer que les 3-cycles sont conjugués dans $\mathfrak{A}_n$ dès que $n \geq 5$.

— **Exercice 14** ●●○○ — **Matrice de permutation**

Pour toute permutation σ de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on note P_σ la matrice $(\delta_{i, \sigma(j)})_{1 \leq i, j \leq n}$, appelée *la matrice de permutation associée à σ* .

- Montrer que, pour tous $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n$, $P_\sigma P_{\sigma'} = P_{\sigma\sigma'}$.
- En déduire que, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, P_σ est inversible et préciser son inverse.
- Montrer que l'application $\sigma \mapsto P_\sigma$ est un morphisme injectif de groupes de $\mathfrak{S}_n$ dans $GL_n(\mathbb{R})$.

— **Exercice 15** ●●○○ — **Action de $\mathfrak{S}_n$ sur l'ensemble des partitions de $\llbracket 1, n \rrbracket$**
(Centrale MP 2022)

On note π_n le nombre de partitions de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Si $\mathcal{P}$ est une telle partition et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $\sigma \cdot \mathcal{P}$ la partition de $\llbracket 1, n \rrbracket$ formée des parties $\sigma(A)$ pour $A \in \mathcal{P}$.

- Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ fixée. Pour $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux partitions de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $\mathcal{P} \sim \mathcal{Q}$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathcal{Q} = \sigma^k \cdot \mathcal{P}$. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
- On suppose ici que σ est un p -cycle, avec p premier. Montrer que les classes d'équivalence sont de cardinal 1 ou p .
- Soit p premier. On considère ici les partitions de $\llbracket 1, n + p \rrbracket$ et on note σ le p -cycle $(1 \ 2 \ \dots \ p)$. Montrer que si $\sigma \cdot \mathcal{P} = \mathcal{P}$, alors soit $\llbracket 1, p \rrbracket$ est inclus dans une partie A de la partition $\mathcal{P}$, soit tous les singletons $\{1\}, \dots, \{p\}$ sont dans la partitions $\mathcal{P}$. En déduire que $\pi_{n+p} \equiv \pi_n + \pi_{n+1} [p]$.

— **Exercice 16** ●●●● — **Théorème de Brauer (X MP 2022)**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note P_σ la matrice de permutation associée à σ (dans $GL_n(\mathbb{C})$). Si σ et σ' sont dans $\mathfrak{S}_n$, montrer que σ et σ' sont conjugués dans $\mathfrak{S}_n$ si et seulement si P_σ et $P_{\sigma'}$ sont semblables.

(Le sens réciproque (théorème de Brauer) est vraiment difficile !)

— **Exercice 17** ●●●● — **ENS PLSR MP 2022** Calculer $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \frac{\varepsilon(\sigma)}{v(\sigma) + 1}$,

où, pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature de σ et $v(\sigma)$ son nombre de points fixes.

— **Exercice 18** ●●●● — Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on pose $A_n(\sigma) = \sum_{i=1}^{n-1} \sigma(i)\sigma(i+1)$.

Déterminer le maximum $\max_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (A_n(\sigma))$.

- Exercice 18. $\max_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (A_n(\sigma)) = \frac{6}{(9 - 5n + 2n^2)}$.
- Exercice 17. $(-1)^{n-1} \frac{u}{n}$.
- Exercice 13. 1. $(\sigma(a) \ \sigma(a^p)) \dots (\sigma(a^p) \ \sigma(a))$. 2. $\{ \text{Id}_{\llbracket 1, n \rrbracket} \}$.
- Exercice 9. 1. $(\sigma(a) \ \sigma(b))$. 2. $\{ \text{Id}_{\llbracket 1, n \rrbracket} \}$.
- Exercice 8. $n \in \{1, 2\}$.
- Exercice 6. $\frac{k(n-k)!}{n!}$.
- Exercice 4. $\varepsilon(\sigma^n) = (-1)^{n(n-1)/2}$ si $n \equiv 0$ ou $1 [4]$, -1 si $n \equiv 2$ ou $3 [4]$.
- Exercice 3. 1. $(a \ c \ b)$. 2. C'est l'identité. 3. Non, e.g. $(1 \ 2) (3 \ 4)$.
2. $\varepsilon(\sigma) = 1$. 3. $\sigma_{2025} = (1 \ 4 \ 7 \ 8) (2 \ 6 \ 5) (3 \ 9) = (1 \ 7) (4 \ 8)$.
- Exercice 2. 1. $\sigma = (1 \ 4 \ 7 \ 8) (2 \ 6 \ 5) (3 \ 9) = (1 \ 4) (4 \ 7) (7 \ 8) (2 \ 6) (6 \ 5) (3 \ 9)$.
3. $\varepsilon((1 \ 3 \ 4) (2 \ 4 \ 3 \ 1) (2 \ 3)) = 1$ et $\varepsilon \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 2 & 1 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix} \right) = -1$.
- Exercice 1. 1. $\sigma\sigma^{-1} = (1 \ 2) (3 \ 4 \ 6)$ et $\sigma^{-1} = (1 \ 4 \ 2) (3 \ 5 \ 6 \ 7)$. 2. $(1 \ 4 \ 3 \ 6 \ 7 \ 2 \ 5)$.

Éléments de réponses

Indications

Exercice 18. On peut établir que la suite des maximums $\left(\max_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (A_n(\sigma)) \right)_{n \geq 1}$ satisfait la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \max_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (A_n(\sigma)) = \max_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n-1}} (A_{n-1}(\sigma)) + n^2 - 2$.