

Cahier de calcul : fiche 29.

Banque CCINP : exercices 5 et 6.

## Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

— **Exercice 1** ●○○○ —  Les familles suivantes sont-elles des bases ?

- $((2, 0, \alpha), (2, \alpha, 2), (\alpha, 0, 2))$ , avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- $((1, 0, 2, 1), (0, 1, 1, 2), (2, 0, 1, 1), (2, 1, 0, 1))$ .

— **Exercice 2** ●●○○ —  **Mines-Ponts MP 2022** Soit  $\mathbb{K}$  un corps infini et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $\mathcal{P} = (P_1, \dots, P_n) \in (\mathbb{K}_{n-1}[X])^n$ . Montrer que la famille  $\mathcal{P}$  est libre si et seulement s'il existe  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$  tel que la matrice  $(P_i(a_j))_{1 \leq i, j \leq n}$  soit inversible— **Exercice 3** ●●○○ — Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $(u_1, \dots, u_{2n+1})$  une famille libre de  $E$ , avec  $n \geq 1$ . Montrer par une technique matricielle que la famille  $(u_1 + u_2, u_2 + u_3, \dots, u_{2n} + u_{2n+1}, u_{2n+1} + u_1)$  est également libre.

## Représentation matricielle des applications linéaires

— **Exercice 4** ●○○○ — 

Pour chacune des applications linéaires suivantes, déterminer sa matrice relativement aux bases canoniques des espaces de départ et d'arrivée.

- $(x, y) \mapsto (y - 3x, 5x + 2y, x + y)$  de  $\mathbb{K}^2$  dans  $\mathbb{K}^3$ .
  - $(x, y, z) \mapsto (x + y + z, x + 3y + 2z, 3x + y + 2z)$  de  $\mathbb{K}^3$  dans  $\mathbb{K}^3$ .
  - $(x, y, z) \mapsto (2x - y + z, 3x + y - z, x + y + z, y - 2z)$  de  $\mathbb{K}^3$  dans  $\mathbb{K}^4$ .
  - $(x, y, z, t) \mapsto (x - y + t, 2x + y - z, y + z)$  de  $\mathbb{K}^4$  dans  $\mathbb{K}^3$ .
  - $(x, y, z) \mapsto (x + z, y + z, 0)$  de  $\mathbb{K}^3$  dans  $\mathbb{K}^3$ .
- $P \mapsto (P(1), P'(1) + P''(0))$  de  $\mathbb{R}_3[X]$  dans  $\mathbb{R}^2$ .
  - $P \mapsto XP + P' + P(1)$  de  $\mathbb{C}_2[X]$  dans  $\mathbb{C}_3[X]$ .
- $M \mapsto M^T$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  dans lui-même.
  - $X \mapsto AX$  de  $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$  dans lui-même avec  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

— **Exercice 5** ●○○○ —  **Banque d'exercices CCINP 2025 (71)**Soit  $p$  la projection vectorielle de  $\mathbb{R}^3$  sur le plan  $P$  d'équation  $x + y + z = 0$ , parallèlement à la droite  $D$  d'équation  $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ .

- Vérifier que  $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$ .
- Soit  $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Déterminer  $p(u)$  et donner la matrice de  $p$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .
- Déterminer une base de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle la matrice de  $p$  est diagonale.

— **Exercice 6** ●○○○ — **Banque d'exercices CCINP 2025 (59)**Soit  $E$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$  de degré inférieur ou égal à  $n$ . Soit  $f$  l'endomorphisme de  $E$  défini par :  $f(P) = P - P'$ , pour tout  $P \in E$ .

- Démontrer que  $f$  est bijectif de deux manières :
  - sans utiliser de matrice de  $f$  ;
  - en utilisant une matrice de  $f$ .
- Soit  $Q \in E$ . Trouver  $P$  tel que  $f(P) = Q$ .  
*Indication : si  $P \in E$ , quel est le polynôme  $P^{(n+1)}$  ?*
- $f$  est-il diagonalisable ?

— **Exercice 7** ●●○○ —  **Transposée d'une application linéaire**

- Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  non nulle et  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Montrer qu'il existe une unique base  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  de  $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$  telle que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad \varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$$

Pour toute base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ , une telle base  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  de  $E^*$  est appelée *base duale* et est notée  $\mathcal{B}^*$ .

- Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie non nulle ainsi que  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  et  $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_p)$  des bases respectives de  $E$  et  $F$ . Pour tout  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ , on note  $u^T \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$  l'application linéaire qui à toute forme linéaire  $\psi \in F^*$  associe  $\psi \circ u \in E^*$ . Quel lien existe-t-il entre  $\text{Mat}_{\mathcal{C}^*, \mathcal{B}^*}(u^T)$  et  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$  ?

— **Exercice 8** ●○○○ —  Soit  $\psi : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^3, P \mapsto (P(0), P'(0), P''(0))$ .

- Montrer que  $\psi$  est un isomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$  sur  $\mathbb{R}^3$ .
- Déterminer la matrice de  $\psi$  dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}_2[X]$  et  $\mathbb{R}^3$ .
- En déduire  $\psi^{-1}$ .

— **Exercice 9** ●○○○ — ✓

- On note  $f$  l'endomorphisme  $P \mapsto P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$  de  $\mathbb{R}_3[X]$ . Déterminer la matrice de  $f$  dans la base canonique, puis en déduire  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$ .
- Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire de  $\mathbb{R}_2[X]$  dans  $\mathbb{R}^2$  de matrice dans les bases canoniques

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

— **Exercice 10** ●●○○ — ✓

Soit  $E$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  engendré par les fonctions

$$f_1 : x \mapsto e^{-x}, \quad f_2 : x \mapsto (1+x)e^{-x} \quad \text{et} \quad f_3 : x \mapsto (x^2-1)e^{-x}.$$

- Montrer que  $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$  est une base de  $E$ .
- Soit  $d : f \mapsto f'$  définie sur  $E$ . Montrer que  $d$  est un endomorphisme de  $E$  et donner sa matrice  $A$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
- Calculer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A^n$ .
- En déduire  $f^{(n)}$  lorsque  $f : x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^{-x}$  avec  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ .

— **Exercice 11** ●○○○ — ✓ On note  $\varphi$  l'application

$$(x, y, z) \mapsto (-3x + 4y - 6z, -12x + 16y - 24z, -6x + 8y - 12z).$$

- Montrer que  $\varphi$  est un projecteur de  $\mathbb{R}^3$ .
- Caractériser géométriquement  $\varphi$ .

— **Exercice 12** ●○○○ — Déterminer une expression de  $u^3 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ , où

$$u : (x, y, z) \mapsto (x - 2z, x - 2y - z, -x + y + 2z).$$

— **Exercice 13** ●●○○ — ✓ **Dualité et sev stables (MinesPons PC 2017)**

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ ,  $\varphi$  une forme linéaire non nulle sur  $E$  et  $f$  un endomorphisme de  $E$ .

- Montrer que  $\text{Ker}(\varphi)$  est stable par  $f$  si et seulement s'il existe un scalaire  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\varphi \circ f = \lambda\varphi$ .
- Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . On note  $L$  la matrice de  $\varphi$  dans le couple de base  $(\mathcal{B}, (1))$  et  $A$  la matrice de  $f$  dans  $\mathcal{B}$ . Montrer que  $\text{Ker}(\varphi)$  est stable par  $f$  si et seulement s'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $A^T L^T = \lambda L^T$ .
- Trouver les sous-espaces de  $\mathbb{R}^3$  stables par l'endomorphisme canoniquement associé à

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

— **Exercice 14** ●○○○ — Soit  $f : P \mapsto \frac{1}{2} \left[ P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right) \right]$  et  $g : P \mapsto P(1)$  définies sur  $\mathbb{R}_2[X]$ .

- Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
  - Déterminer sa matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$ . On la notera  $A$ .
  - L'endomorphisme  $f$  est-il injectif? surjectif? bijectif?
- Montrer que  $g$  est une forme linéaire sur  $\mathbb{R}_2[X]$ .
  - La forme linéaire  $g$  est-elle surjective?
  - Déterminer une base de  $\text{Ker } g$ .  $g$  est-elle injective?
  - En déduire, de deux façons différentes, la dimension de  $\text{Ker } g$ .
- Posons  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$  et  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$ .
  - Vérifier que  $AB = BD$ .
  - Montrer que  $B$  est inversible et expliciter  $B^{-1}$ .
  - En déduire, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A^n$ .
- Pour tous  $n \in \mathbb{N}$  et  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , déterminer  $f^n(a + bX + cX^2)$  en fonction de  $a, b$  et  $c$ .
- En déduire que

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} g(f^n(P)) = \int_0^1 P(t) dt.$$

— **Exercice 15** ●●○○ — ✓ On note  $A = \left( \binom{j-1}{i-1} \right)_{1 \leq i, j \leq n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ .

- Montrer que  $A$  est inversible.
- Donner une expression simple de l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$  de matrice  $A$  dans la base canonique.
- En déduire l'inverse de  $A$ .

— **Exercice 16** ●●○○ — ✓ **Mines-Pons MP 2022**

Soit  $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$  et  $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$  telles que  $AB = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

- Décrire l'endomorphisme associé à  $AB$ .
- Montrer que  $BA$  est inversible.
- Que dire des noyaux et des images de  $A$  et  $B$ ?
- Calculer  $BA$ .

— **Exercice 17** ●●○○ — Soit  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . On suppose que  $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et on note  $f$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $M$ .

1. Montrer que  $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$  et  $\text{Im } f = \text{Im } f^2$ .
2. En déduire que la première colonne et la dernière ligne de  $M$  sont nulles et aboutir à une contradiction.

— **Exercice 18** ●●○○ — Soit  $f$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^4$  tel que

$$f^2 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)} \quad \text{et} \quad f \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)}.$$

1. Montrer que  $\text{rg } f \in \{1, 2\}$ .
2. Selon le rang de  $f$ , montrer qu'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^4$  telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

— **Exercice 19** ●●○○ —  **X MP 2022**

Soit  $n \geq 3$ . Caractériser les endomorphismes  $u$  de  $\mathbb{K}^n$  pour lesquels il existe une base dans laquelle  $u$  est représenté par une matrice de la forme suivante, avec  $M \in \mathcal{M}_{n-2}(\mathbb{K})$ ,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0_{1,n-2} & 0 \\ 0_{n-2,1} & M & 0_{n-2,1} \\ 0 & 0_{1,n-2} & 0 \end{pmatrix}.$$

## Calcul matriciel

— **Exercice 20** ●○○○ —  Soit  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Calculer le rang des matrices suivantes

$$1. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad 2. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} \quad 3. \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & -5 \\ 6 & 5 & -2 & -5 \\ 9 & 5 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} \quad 4. \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

— **Exercice 21** ●●○○ —  **Mines-Ponts MP 2022**

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Déterminer le rang de la matrice  $((i+j+\alpha)^2)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

— **Exercice 22** ●●○○ —  Soit  $M_{\alpha, \beta} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha & \beta \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ .

Déterminer pour quelles valeurs des réels  $\alpha$  et  $\beta$  l'application linéaire canoniquement associée à  $M_{\alpha, \beta}$  est surjective.

— **Exercice 23** ●○○○ —  Donner sans calcul le rang des matrices suivantes.

$$1. \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad 2. \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{[n]} \quad 3. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & \cdots & n^2 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 4 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

— **Exercice 24** ●○○○ —

1. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  vérifiant

$$f((1, 1, 0)) = (1, 2, 0), \quad f((1, 0, 1)) = (3, -1, 2) \quad \text{et} \quad f((0, 1, 1)) = (5, 3, 2).$$

2. Déterminer le rang de  $f$  de deux façons différentes.

— **Exercice 25** ●○○○ — Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  et  $u$  l'endomorphisme

de  $\mathbb{R}^4$  canoniquement associé à  $A$ .

1. Déterminer le rang de  $u$ .
2. Déterminer une base de  $\text{Ker } u$  et de  $\text{Im } u$ .
3. Décrire  $\text{Im } u$  comme ensemble de solutions d'un système linéaire d'équations.
4. Préciser l'expression analytique de  $u$ .

— **Exercice 26** ●●○○ —

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . À quelle condition nécessaire et suffisante sur  $\lambda$  les sous-espaces vectoriels  $\text{Vect}((\lambda, \lambda, 1))$  et  $\text{Vect}((1, \lambda, 1), (2, 1, 1))$  sont-ils supplémentaires dans  $\mathbb{R}^3$  ?

— **Exercice 27** ●●○○ —

Soit  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Montrer que si  $AB$  est inversible, alors  $A$  et  $B$  le sont aussi.

— **Exercice 28** ●●○○ —

1. Montrer que, pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,  $X^\top X = 0 \implies X = 0$ .
2. En déduire que, pour tout  $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ ,  $\text{rg}(M^\top M) = \text{rg} M$ .

— **Exercice 29** ●○○○ — Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On souhaite établir l'inégalité

$$\text{rg}(AB) \geq \text{rg} A + \text{rg} B - n.$$

On note  $f$  et  $g$  les endomorphismes de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associés à  $A$  et  $B$ .

1. On note  $h$  la restriction de  $f$  à  $\text{Im} g$ . Montrer que  $h$  est une application linéaire de  $\text{Im} g$  dans  $\mathbb{R}^n$ .
2. Montrer que  $\text{Ker} h = \text{Ker} f \cap \text{Im} g$  et  $\text{Im} h = \text{Im}(f \circ g)$ .
3. En déduire que  $\text{rg}(AB) = \text{rg} g - \dim(\text{Ker} h)$  et conclure.

— **Exercice 30** ●●●○ — Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ ,  $C \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$  et  $D \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ . On suppose  $A$  inversible.



1. Compléter le calcul par blocs suivant

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0_{n,p} \\ \cdots & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdots & 0_{n,q} \\ 0_{p,n} & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & \cdots \\ 0_{q,n} & I_q \end{pmatrix}.$$


2. En déduire une inégalité intéressante de rangs.

— **Exercice 31** ●●○○ —   **Matrice de Vandermonde**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ . On appelle *matrice de Vandermonde* de  $x_1, \dots, x_n$  la matrice carrée  $(x_i^{j-1})_{1 \leq i, j \leq n}$ . Montrer que cette matrice est inversible si et seulement si les  $x_i$  sont distincts.

— **Exercice 32** ●●○○ —   Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions respectives  $n$  et  $p$ . Notons  $e = (e_1, \dots, e_n)$  et  $f = (f_1, \dots, f_p)$  des bases respectives de  $E$  et  $F$ . Déterminer la dimension de  $\text{Vect}((e_i, f_j))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ .


## Changement de bases, équivalence et similitude

— **Exercice 33** ○○○○ —  On note  $u$  l'application linéaire de  $\mathbb{R}^4$  dans  $\mathbb{R}^3$  définie par  $(x, y, z, t) \mapsto (2x - y + z + 5t, -x + 2y + 3z - 4t, x + 5z + 6t)$ .

1. Déterminer la matrice de  $u$  dans les bases canoniques.
2. Montrer que les familles suivantes sont des bases respectives de  $\mathbb{R}^4$  et  $\mathbb{R}^3$  :

$$\mathcal{B} = ((1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 1)) \text{ et } \mathcal{C} = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)).$$

3. Déterminer  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$ .

— **Exercice 34** ●●○○ — 

1. On pose  $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ 3 & -8 & 10 \\ 3 & -9 & 11 \end{pmatrix}$ .

- a. Résoudre le système linéaire  $AX = \lambda X$ , d'inconnue  $X \in \mathbb{R}^3$ , pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
- b. On pose, en lien avec la question précédente,

$$e_1 = (3, 1, 0), \quad e_2 = (-1, 1, 1) \quad \text{et} \quad e_3 = (0, 1, 1).$$

Montrer que la famille  $(e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

- c. Déterminer la matrice  $A'$  de l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$  dans la base  $(e_1, e_2, e_3)$ .
- d. En déduire l'expression de  $A^n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

2. Reprendre les questions précédentes avec la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .  
(On adaptera bien sûr le choix des vecteurs  $e_i$ .)

— **Exercice 35** ●●○○ — Montrer que les matrices suivantes sont semblables.

$$1. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$2. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad 3. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

— **Exercice 36** ●○○○ — 

Quelles sont les matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  semblables à la matrice  $J_r$  ?

— **Exercice 37** ●●○○ — ☑ On pose  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} -7 & -4 \\ 15 & 9 \end{pmatrix}$ .

Montrer que  $A$  et  $B$  sont semblables et déterminer toutes les matrices  $P \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$  pour lesquelles  $B = P^{-1}AP$ .

— **Exercice 38** ●●○○ — Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  de rang  $r$ .

1. Montrer que  $A$  est semblable à une matrice par bloc  $\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}$  avec  $B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$  et  $C \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{K})$ .
2. On suppose à présent  $\text{Im } A$  et  $\text{Ker } A$  supplémentaires dans  $\mathbb{K}^n$ . Montrer que l'on peut imposer à  $C$  d'être nulle. Que peut-on alors dire de  $B$  ?

— **Exercice 39** ●●○○ — ☹ Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice nilpotente d'indice de nilpotence égal à  $n$ . Montrer que  $A$  est semblable à la matrice par bloc  $\begin{pmatrix} 0_{1,n-1} & 0 \\ I_{n-1} & 0_{n-1,1} \end{pmatrix}$ .

— **Exercice 40** ●●○○ — ☹ Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice de rang  $r$ . Montrer que  $\text{rg}(A^2) = r$  si et seulement si  $A$  est semblable à une matrice  $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , avec  $B \in \text{GL}_r(\mathbb{K})$ .

— **Exercice 41** ●●○○ — ☹ Mines-Ponts PSI 2017

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$  (avec  $2 \neq 0$  dans  $\mathbb{K}$ ) ainsi que  $f$  et  $g$  deux endomorphismes de  $E$  tels que  $f^2 = g^2 = \text{Id}_E$  et  $f \circ g + g \circ f = 0$ .

1. Montrer que  $n$  est pair.
2. On pose  $n = 2p$ . Montrer qu'il existe une base de  $E$  dans laquelle  $f$  et  $g$  sont respectivement représentés par les matrices  $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_p \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 0 & I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$ .

— **Exercice 42** ●●○○ — ☹☑ Mines-Ponts MP 2021

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$  non nulle. Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $u \neq u^2 = u^3$ . On note  $\mathcal{A}$  l'ensemble des matrices de  $u$  dans toutes les bases de  $E$ . Déterminer  $\max\{z(M) \mid M \in \mathcal{A}\}$ , où  $z(M)$  désigne le nombre de coefficients nuls dans la matrice  $M$ .

— **Exercice 43** ●●○○ — ☑ Calculer la trace des endomorphismes suivants.

1. L'endomorphisme  $P \mapsto P(aX + b)$  de  $\mathbb{R}_n[X]$ , où  $a, b \in \mathbb{R}$ .
2. a. L'endomorphisme  $M \mapsto M^\top$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ .  
b. L'endomorphisme  $M \mapsto M^\top$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .
3. L'endomorphisme  $M \mapsto AM$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , où  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

— **Exercice 44** ●●○○ — ☹ Mines-Ponts MP 2022

Soit  $p, q, r$  trois projecteurs sur un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. On suppose que  $p + \sqrt{2}q + \sqrt{3}r$  est aussi un projecteur. Montrer que  $q = r = 0$ .

— **Exercice 45** ●●○○ — Intersection non triviale de  $\text{GL}_n(\mathbb{K})$  avec un hyperplan

1. Pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on note  $t_A$  la forme linéaire  $M \mapsto \text{tr}(AM)$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On note en outre  $t$  l'application  $A \mapsto t_A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  dans  $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$ .

- a. Montrer que  $t$  est linéaire.
- b. Montrer que  $t$  est un isomorphisme.

2. Soit  $H$  un hyperplan de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

- a. Justifier l'existence d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  non nulle pour laquelle

$$H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \text{tr}(AM) = 0\}.$$

- b. Pour tout  $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on pose  $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Trouver une matrice  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  pour laquelle  $\text{tr}(J_r M) = 0$ .

- c. En déduire que  $H$  contient au moins une matrice inversible.

— **Exercice 46** ●●○○ — Mines-Ponts MP 2022

Soit  $n \geq 2$ . Montrer que tout hyperplan de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  contient une matrice inversible.

— **Exercice 47** ●●○○ — Mines-Ponts MP 2022 Soit  $n, p \in \mathbb{N}$ , avec  $1 \leq p < n$ .

Soit  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , avec  $A \in \text{GL}_p(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que  $(X \ Y)^\top \mapsto Y$  est un isomorphisme de  $\text{Ker } M$  sur  $\text{Ker}(D - CA^{-1}B)$ .
2. En déduire que  $\text{rg}(M) = p$  si et seulement si  $D = CA^{-1}B$ .

Soit  $V$  un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On note  $p = \max\{\text{rg}(M) \mid M \in V\}$ . Le but des questions suivantes est de montrer que  $V$  est de dimension inférieure ou égale à  $np$ .

3. Pourquoi peut-on supposer, sans perte de généralité, que  $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  appartient à  $V$  ?



On fait alors cette hypothèse par la suite.

4. Soit  $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^\top & A \end{pmatrix} \mid A \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{R}), B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{R}) \right\}$ . Montrer que  $V \cap W = \{0\}$ .

5. Conclure.

— **Exercice 48** ●●○○ — ☹ X MP 2022

Soit  $V$  un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  dont tous les éléments sont de rang inférieur ou égal à  $r$ . Montrer que  $\dim V \leq n \times r$ .

— **Exercice 49** ●●●○ —   Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies non nulles et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Déterminer la dimension de

$$\mathcal{G} = \{g \in \mathcal{L}(F, E) \mid fgf = 0_{\mathcal{L}(E, F)}\}.$$

— **Exercice 50** ●●○○ — **Action par multiplication à gauche**

On définit sur  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  la relation binaire  $\sim$  par

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad A \sim B \iff (\exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{K}), \quad A = PB).$$

1. Montrer que  $\sim$  définit une relation d'équivalence sur  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .
2. Montrer que deux matrices sont dans la même classe d'équivalence si et seulement si elles ont le même noyau.

— **Exercice 51** ●●○○ — **Base antéduale**

Soit un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$  non nulle. Pour une base  $\mathcal{B}$  de  $E$ , on note  $\mathcal{B}^*$  la base duale associée (cf. théorème 54 du chapitre 23).

1. Pour toutes bases  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  de  $E$ , montrer que  $P_{\mathcal{B}_1^*}^{\mathcal{B}_2^*} = \left( \left( P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} \right)^{-1} \right)^\top$ .
2. En déduire que l'application  $\mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}^*$  réalise une bijection de l'ensemble des bases de  $E$  sur celui des bases de  $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ .

On dispose ainsi, pour toute base  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ , d'une unique base  $\mathcal{B}$  de  $E$  dont la duale est  $\mathcal{C}$ . Cette base  $\mathcal{B}$  est appelée la base antéduale de  $\mathcal{C}$ .

### Indications

**Exercice 2.** On peut utiliser des polynômes interpolateurs de Lagrange.

**Exercice 16.** 1. On pourra remarquer que  $(AB)^2 = AB$ . 4. On pourra commencer par prouver que  $BA^2 = BA$ .

**Exercice 31.** Interpréter la matrice de Vandermonde comme la matrice d'une application linéaire *ad hoc*.

**Exercice 32.** On pourra calculer le rang de la matrice des vecteurs de la famille dans une base naturelle de  $E \times F$ .

**Exercice 39.** Utiliser le résultat de la question 1 de l'exercice 23.40.

**Exercice 40.** On pourra penser aux résultats liés aux noyaux itérés (cf. exercice 23.47).

**Exercice 41.** 1. Que dire de la trace de  $f$  ou  $g$  ?

**Exercice 42.** On pourra commencer par montrer que  $E = \text{Ker}(u - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(u^2)$ .

Que dire de  $u|_{\text{Ker}(u^2)}$  ?

**Exercice 44.** Penser à utiliser la trace.

**Exercice 48.** Cf. exercice 47.

**Exercice 49.** Raisonner matriciellement, en pensant aux matrices  $J_r$ .

**Éléments de réponses**

**Exercice 1.** 1. Base si et seulement si  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 2\}$ . 2. Oui.

**Exercice 4.** 1.a  $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  1.b  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  1.c  $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$  1.d  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1.e  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  2.a  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$  2.b  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  3.a  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  3.b  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**Exercice 5.** 1.  $P \cap D = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$  et  $\dim P + \dim D = \dim \mathbb{R}^3$ .

2.  $p(x, y, z) = \frac{1}{6}(5x - y - z, -2x + 4y - 2z, -3x - 3y + 3z)$ .

3. Il suffit de considérer une base adaptée à la décomposition  $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$ .

**Exercice 7.** 2.  $\text{Mat}_{\mathcal{E}^*, \mathcal{B}^*}(u^\top) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{E}}(u))^\top$ .

**Exercice 8.** 1. Il suffit de montrer que  $\psi$  est une application linéaire injective (pourquoi?).

2.  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{E}}(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ . 3.  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{E}}(\psi^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ ,

ainsi  $\psi^{-1}((a, b, c)) = a + bX + \frac{c}{2}X^2$ .

**Exercice 9.** 1.  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $\text{Ker } f = \text{Im } f = \mathbb{R}_1[X]$ .

2.  $\text{Im } f = \mathbb{R}^2$  et  $\text{Ker } f = \text{Vect}(X^2 - 3X - 2))$ .

**Exercice 10.** 2.  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ . 3.  $A^n = (-I_3 + N)^n = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & -n & n(n+1) \\ 0 & 1 & -2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

4.  $f^{(n)} : x \mapsto x \mapsto (-1)^n(ax^2 + (b - 2na)x + n(n - 1)a - nb + c)e^{-x}$ .

**Exercice 11.** 2.  $\varphi$  est la projection sur la droite  $\text{Vect}((1, 4, 2))$  parallèlement au plan d'équation  $3x - 4y + 6z = 0$ .

**Exercice 13.** 3. Les sous-espaces stables sont  $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$ , les droites vectorielles  $\text{Vect}((1, 0, 0))$  et  $\text{Vect}((0, 0, 1))$ , les plans vectoriels d'équations  $y = 0$  et  $z = 0$ , et  $\mathbb{R}^3$ .

**Exercice 15.** 1. La matrice est triangulaire... 2.  $f : P \mapsto P(X + 1)$ .

3.  $f^{-1} : P \mapsto P(X - 1)$  et  $A^{-1} = \left( (-1)^{j-i} \binom{j-1}{i-1} \right)_{1 \leq i, j \leq n+1}$ .

**Exercice 16.** Notons  $(e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

1.  $\widehat{AB}$  est la projection sur  $\text{Vect}(e_2, e_1 + 2e_3)$  parallèlement à  $\text{Vect}(e_1 + e_3)$ .

3.  $\text{Ker } A = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ ,  $\text{Im } A = \text{Im } AB$ ,  $\text{Ker } B = \text{Ker } AB$  et  $\text{Im } B = \mathbb{R}^2$ . 4.  $BA = I_2$ .

**Exercice 19.** Ce sont les  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$  tels qu'il existe des sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  de  $E$  tels que

$$E = F \oplus G, \quad F \subset \text{Ker } u, \quad \dim F = 2 \quad \text{et} \quad u[G] \subset G.$$

**Exercice 20.** 1. 2.  $\text{Card}\{a, b, c\}$ . 3. 4. 4.  $\begin{cases} 1 & \text{si } a = 1 \\ 2 & \text{si } a = -2 \\ 3 & \text{sinon} \end{cases}$ .

**Exercice 21.**  $\text{rg}((i + j + \alpha)_{1 \leq i, j \leq n}) = \begin{cases} 0 \text{ ou } 1 & \text{si } n = 1 \\ 2 & \text{si } n = 2 \\ 3 & \text{si } n \geq 3. \end{cases}$

**Exercice 22.** Il y a surjectivité si et seulement si  $(\alpha, \beta) \neq (22, 4)$ .

**Exercice 23.** 1. 2. 2. 1. 3. 2.

**Exercice 26.** Les sous-espaces vectoriels sont supplémentaires si et seulement si  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

**Exercice 31.**  $(x_i^{j-1})_{1 \leq i, j \leq n}$  est la matrice de  $P \mapsto (P(x_i))_{1 \leq i \leq n}$  dans les bases canoniques respectives de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  et  $\mathbb{R}^n$ .

**Exercice 32.**  $\dim \text{Vect}((e_i, f_j))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = n + p - 1$ .

**Exercice 33.** 1.  $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ . 2.  $\begin{pmatrix} 1 & 11 & 12 & 7 \\ -2 & -12 & -12 & -12 \\ 3 & 7 & 7 & 12 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 34.** 1.a L'ensemble des solutions de  $AX = \lambda X$  est  $\begin{cases} \text{Vect}(e_1) & \text{si } \lambda = 1 \\ \text{Vect}(e_2) & \text{si } \lambda = -1 \\ \text{Vect}(e_3) & \text{si } \lambda = 2 \\ \{0\} & \text{sinon.} \end{cases}$

1.c  $A' = \text{Diag}(1, -1, 2)$ .

1.d  $A^n = PA^nP^{-1} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 3(1 - (-1)^n) & -3(1 - (-1)^n) \\ 2^n - (-1)^n & 3(-1)^n - 3 \times 2^n + 1 & 2^{n+2} - 3(-1)^n - 1 \\ 2^n - (-1)^n & 3(-1)^n - 3 \times 2^n & 2^{n+2} - 3(-1)^n \end{pmatrix}$  où

$P = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  est la matrice de la famille  $(e_1, e_2, e_3)$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

2.a L'ensemble des solutions de  $AX = \lambda X$  est  $\begin{cases} \text{Vect}(e_1) & \text{si } \lambda = 2 \\ \text{Vect}(e_2) & \text{si } \lambda = 1 \\ \text{Vect}(e_3) & \text{si } \lambda = 0 \\ \{0\} & \text{sinon,} \end{cases}$  avec  $e_1 = (1, 1, 1)$ ,

$e_2 = (1, -1, 0)$  et  $e_3 = (1, -1, 1)$ . 2.c  $A' = \text{Diag}(2, 1, 0)$ .

2.d  $A^n = PA^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} + 1 & 2^{n-1} & -1 \\ 2^{n-1} - 1 & 2^{n-1} & 1 \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \end{pmatrix}$ , pour  $n \geq 1$ , où  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  est

la matrice de la famille  $(e_1, e_2, e_3)$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

**Exercice 36.** Les matrices semblables à  $J_r$  sont les matrices  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telles que  $A^2 = A$  et  $\text{rg}(A) = r$ .

**Exercice 37.**  $\left\{ \begin{pmatrix} 5d - 3c & \frac{7}{3}d - \frac{4}{3}c \\ c & d \end{pmatrix} \mid c, d \in \mathbb{R} \text{ et } (2c - 3d)(2c - 5d) \neq 0 \right\}$ .

**Exercice 42.**  $\max = n^2 - \text{rg } u$ .

**Exercice 43.** 1.  $\begin{cases} n + 1 & \text{si } a = 1 \\ \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} & \text{si } a \neq 1. \end{cases}$  2.a 2. 2.b  $n$ . 3.  $n \text{tr}(A)$ .

**Exercice 49.**  $\dim \mathcal{G} = \dim E \times \dim F - (\operatorname{rg} f)^2$ .