27 Matrices *vs* applications linéaires

Cahier de calcul : fiche 29. **Banque CCINP :** exercices 5 et 6.

Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Exercice 1 ●○○○ Les familles suivantes sont-elles des bases ?

1. $((2,0,\alpha),(2,\alpha,2),(\alpha,0,2))$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. $((1,0,2,1),(0,1,1,2),(2,0,1,1),(2,1,0,1))$.

Exercice 2 ●●○○ **Mines-Ponts MP 2022** Soit $\mathbb{K}$ un corps infini et $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathscr{P} = (P_1,\dots,P_n) \in (\mathbb{K}_{n-1}[X])^n$. Montrer que la famille $\mathscr{P}$ est libre si et seulement s'il existe $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que la matrice $(P_i(a_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ soit inversible

Exercice 3 ●●○○ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(u_1,\dots,u_{2n+1})$ une famille libre de E, avec $n \geqslant 1$. Montrer par une technique matricielle que la famille $(u_1+u_2, u_2+u_3,\dots,u_{2n}+u_{2n+1},u_{2n+1}+u_1)$ est également libre.

Représentation matricielle des applications linéaires

Exercice 4 ●○○○

Pour chacune des applications linéaires suivantes, déterminer sa matrice relativement aux bases canoniques des espaces de départ et d'arrivée.

1. **a.** $(x,y) \longmapsto (y-3x, 5x+2y, x+y)$ de $\mathbb{K}^2$ dans $\mathbb{K}^3$.
   b. $(x,y,z) \longmapsto (x+y+z, x+3y+2z, 3x+y+2z)$ de $\mathbb{K}^3$ dans $\mathbb{K}^3$.
   c. $(x,y,z) \longmapsto (2x-y+z, 3x+y-z, x+y+z, y-2z)$ de $\mathbb{K}^3$ dans $\mathbb{K}^4$.
   d. $(x,y,z,t) \longmapsto (x-y+t, 2x+y-z, y+z)$ de $\mathbb{K}^4$ dans $\mathbb{K}^3$.
   e. $(x,y,z) \longmapsto (x+z, y+z, 0)$ de $\mathbb{K}^3$ dans $\mathbb{K}^3$.
2. **a.** $P \longmapsto (P(1), P'(1)+P''(0))$ de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}^2$.
   b. $P \longmapsto XP + P' + P(1)$ de $\mathbb{C}_2[X]$ dans $\mathbb{C}_3[X]$.
3. **a.** $M \longmapsto M^\top$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ dans lui-même.
   b. $X \longmapsto AX$ de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ dans lui-même avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 ●○○○ **Banque d'exercices CCINP 2024 (71)**

Soit p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur le plan P d'équation $x+y+z=0$, parallèlement à la droite D d'équation $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

Exercice 6 ●○○○ **Banque d'exercices CCINP 2024 (59)**

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à n. Soit f l'endomorphisme de E défini par : $f(P) = P - P'$, pour tout $P \in E$.

1. Démontrer que f est bijectif de deux manières :
   a. sans utiliser de matrice de f ;
   b. en utilisant une matrice de f.
2. Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$.
   Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?
3. ~~f est-il diagonalisable ?~~

Exercice 7 ●●○○ **Transposée d'une application linéaire**

1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n non nulle et $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Montrer qu'il existe une unique base $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ de $E^\star = \mathscr{L}(E,\mathbb{R})$ telle que

$$\forall (i,j) \in [\![1\,,n]\!]^2, \quad \varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$$

Pour toute base $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, une telle base $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ de $E^\star$ est appelée *base duale* et est notée $\mathscr{B}^\star$.

2. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie non nulle ainsi que $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ et $\mathscr{C} = (f_1,\dots,f_p)$ des bases respectives de E et F.
   Pour tout $u \in \mathscr{L}(E,F)$, on note $u^\top \in \mathscr{L}(F^\star,E^\star)$ l'application linéaire qui à toute forme linéaire $\psi \in F^\star$ associe $\psi \circ u \in E^\star$. Quel lien existe-t-il entre $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}^\star,\mathscr{B}^\star}(u^\top)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$?

Exercice 8 ●○○○ Soit $\psi : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3, P \longmapsto (P(0), P'(0), P''(0))$.

1. Montrer que ψ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ sur $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de ψ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^3$.
3. En déduire ψ^{-1}.

Exercice 9 ●○○○

1. On note f l'endomorphisme $P \longmapsto P(X+1)+P(X-1)-2P(X)$ de $\mathbb{R}_3[X]$. Déterminer la matrice de f dans la base canonique, puis en déduire $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.
2. Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^2$ de matrice dans les bases canoniques
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10 ●●○○ Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ engendré par les fonctions
$$f_1 : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}, \quad f_2 : x \longmapsto (1+x)\,\mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad f_3 : x \longmapsto \left(x^2-1\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Montrer que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de E.
2. Soit $d : f \longmapsto f'$ définie sur E. Montrer que d est un endomorphisme de E et donner sa matrice A dans la base $\mathcal{B}$.
3. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n.
4. En déduire $f^{(n)}$ lorsque $f : x \longmapsto \left(ax^2+bx+c\right)\mathrm{e}^{-x}$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 11 ●○○○ On note φ l'application
$$(x,y,z) \longmapsto (-3x+4y-6z, -12x+16y-24z, -6x+8y-12z).$$

1. Montrer que φ est un projecteur de $\mathbb{R}^3$.
2. Caractériser géométriquement φ.

Exercice 12 ●○○○ Déterminer une expression de u^3, où
$$u : (x,y,z) \longmapsto (x-2z, x-2y-z, -x+y+2z)$$

Exercice 13 ●●○○ **MinesPonts PC 2017** Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, φ une forme linéaire non nulle sur E et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que $\operatorname{Ker}(\varphi)$ est stable par f si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi \circ f = \lambda\varphi$.
2. Soit $\mathscr{B}$ une base de E. On note L la matrice de φ dans le couple de base $(\mathscr{B}, (1))$ et A la matrice de f dans $\mathscr{B}$. Montrer que $\operatorname{Ker}(\varphi)$ est stable par f si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A^\top L^\top = \lambda L^\top$.
3. Trouver les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme canoniquement associé à
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14 ●○○○ Soit $f : P \longmapsto \dfrac{1}{2}\left[P\left(\dfrac{X}{2}\right) + P\left(\dfrac{X+1}{2}\right)\right]$ et $g : P \longmapsto P(1)$ définies sur $\mathbb{R}_2[X]$.

1. **a.** Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
   b. Déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On la notera A.
   c. L'endomorphisme f est-il injectif ? surjectif ? bijectif ?
2. **a.** Montrer que g est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
   b. La forme linéaire g est-elle surjective ?
   c. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} g$. g est-elle injective ?
   d. En déduire, de deux façons différentes, la dimension de $\operatorname{Ker} g$.
3. Posons $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$.
   a. Vérifier que $AB = BD$.
   b. Montrer que B est inversible et expliciter B^{-1}.
   c. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n.
4. Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $a, b, c \in \mathbb{R}$, déterminer $f^n(a+bX+cX^2)$ en fonction de a, b et c.
5. En déduire que
$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \lim_{n \to +\infty} g(f^n(P)) = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 15 ●●○○ On note $A = \left(\dbinom{j-1}{i-1}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A est inversible.
2. Donner une expression simple de l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ de matrice A dans la base canonique.
3. En déduire l'inverse de A.

Exercice 16 ●●○○ **Mines-Ponts MP 2022**

Soit $A \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Décrire l'endomorphisme associé à AB.
2. Montrer que BA est inversible.
3. Que dire des noyaux et des images de A et B ?
4. Calculer BA.

Exercice 17 ●●○○ Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On suppose que $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on note f l'endomorphisme canoniquement associé à M.

1. Montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$ et $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.
2. En déduire que la première colonne et la dernière ligne de M sont nulles et aboutir à une contradiction.

Exercice 18 ●●●○ Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ tel que

$$f^2 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^4)} \quad \text{et} \quad f \neq 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^4)}.$$

1. Montrer que $\operatorname{rg} f \in \{1, 2\}$.
2. Selon le rang de f, montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^4$ telle que

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 19 ●●●○ X MP 2022
Soit $n \geqslant 3$. Caractériser les endomorphismes u de $\mathbb{K}^n$ pour lesquels il existe une base dans laquelle u est représenté par une matrice de la forme suivante avec $M \in \mathscr{M}_{n-2}(\mathbb{K})$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0_{1,n-2} & 0 \\ 0_{n-2,1} & M & 0_{n-2,1} \\ 0 & 0_{1,n-2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcul matriciel

Exercice 20 ●○○○ Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Calculer le rang des matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & -5 \\ 6 & 5 & -2 & -5 \\ 9 & 5 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.

Exercice 21 ●●○○ Mines-Ponts MP 2022
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer le rang de la matrice $\left((i + j + \alpha)^2\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 22 ●●○○ Soit $M_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha & \beta \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,4}(\mathbb{R})$.
Déterminer pour quelles valeurs de α et β l'application linéaire canoniquement associée à $M_{\alpha,\beta}$ est surjective.

Exercice 23 ●○○○ Donner sans calcul le rang des matrices suivantes.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{[n]}$. **3.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & \cdots & n^2 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 4 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 24 ●○○○

1. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ vérifiant

$$f((1,1,0)) = (1,2,0), \quad f((1,0,1)) = (3,-1,2) \quad \text{et} \quad f((0,1,1)) = (5,3,2).$$

2. Déterminer le rang de f de deux façons différentes.

Exercice 25 ●○○○ Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à A.

1. Déterminer le rang de u.
2. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} u$ et de $\operatorname{Im} u$.
3. Décrire $\operatorname{Im} u$ comme ensemble de solutions d'un système linéaire d'équations.
4. Préciser l'expression analytique de u.

Exercice 26 ●●○○
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. À quelle condition nécessaire et suffisante sur λ les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Vect}((\lambda, \lambda, 1))$ et $\operatorname{Vect}((1, \lambda, 1), (2, 1, 1))$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 27 ●●○○
Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que si AB est inversible, alors A et B le sont aussi.

Exercice 28 ●●○○

1. Montrer que, pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\quad X^\top X = 0 \implies X = 0$.

2. En déduire que, pour tout $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\operatorname{rg}\big(M^\top M\big) = \operatorname{rg} M$.

Exercice 29 ●○○○ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On souhaite établir l'inégalité

$$\operatorname{rg}(AB) \geqslant \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B - n.$$

On note f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associés à A et B.

1. On note h la restriction de f à $\operatorname{Im} g$. Montrer que h est une application linéaire de $\operatorname{Im} g$ dans $\mathbb{R}^n$.

2. Montrer que $\quad \operatorname{Ker} h = \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} g \quad$ et $\quad \operatorname{Im} h = \operatorname{Im}(f \circ g)$.

3. En déduire que $\operatorname{rg}(AB) = \operatorname{rg} g - \dim(\operatorname{Ker} h)$ et conclure.

Exercice 30 ●●●○ Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On suppose A inversible.

1. Compléter le calcul par blocs suivant :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0_{n,p} \\ \cdots & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdots & 0_{n,q} \\ 0_{p,n} & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & \cdots \\ 0_{q,n} & I_q \end{pmatrix}.$$

2. En déduire une inégalité intéressante de rangs.

Exercice 31 ●●○○ **Matrice de Vandermonde** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$. On appelle *matrice de Vandermonde de* $x_1, \dots, x_n$ la matrice carrée $\left(x_i^{j-1}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Montrer que cette matrice est inversible si et seulement si les x_i sont distincts.

Exercice 32 ●●●○ Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives n et p. Notons $e = (e_1, \dots, e_n)$ et $f = (f_1, \dots, f_p)$ des bases respectives de E et F. Déterminer la dimension de $\operatorname{Vect}\big((e_i, f_j)\big)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$.

Changement de bases, équivalence et similitude

Exercice 33 ○○○○ On note u l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $(x, y, z, t) \longmapsto (2x - y + z + 5t, -x + 2y + 3z - 4t, x + 5z + 6t)$.

1. Déterminer la matrice de u dans les bases canoniques.

2. Montrer que les familles suivantes sont des bases respectives de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$:

$$\mathscr{B} = ((1,0,0,0), (0,0,1,1), (1,1,1,1), (1,0,0,1)) \text{ et } \mathscr{C} = ((1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)).$$

3. Déterminer $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$.

Exercice 34 ●●○○

1. On pose $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ 3 & -8 & 10 \\ 3 & -9 & 11 \end{pmatrix}$.

a. Résoudre le système linéaire $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathbb{R}^3$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

b. On pose, en lien avec la question précédente,

$$e_1 = (3,1,0), \quad e_2 = (-1,1,1) \quad \text{et} \quad e_3 = (0,1,1).$$

Montrer que la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

c. Déterminer la matrice A' de l'endomorphisme canoniquement associé à A dans la base (e_1, e_2, e_3).

d. En déduire l'expression de A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Reprendre les questions précédentes avec la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(On adaptera bien sûr le choix des vecteurs e_i.)

Exercice 35 ●●○○ Montrer que les matrices suivantes sont semblables.

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 36 ●○○○

Quelles sont les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ semblables à la matrice J_r ?

Exercice 37 ●●○○ On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -7 & -4 \\ 15 & 9 \end{pmatrix}$.
Montrer que A et B sont semblables et déterminer toutes les matrices $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ pour lesquelles $B = P^{-1}AP$.

Exercice 38 ●●○○ Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de rang r.

1. Montrer que A est semblable à une matrice par bloc $\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}$ avec $B \in \mathscr{M}_r(\mathbb{K})$ et $C \in \mathscr{M}_{n-r,r}(\mathbb{K})$.
2. On suppose à présent $\operatorname{Im} A$ et $\operatorname{Ker} A$ supplémentaires dans $\mathbb{K}^n$. Montrer que l'on peut imposer à C d'être nulle. Que peut-on alors dire de B ?

Exercice 39 ●●●○ Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente d'indice de nilpotence égal à n. Montrer que A est semblable à la matrice par bloc $\begin{pmatrix} 0_{1,n-1} & 0 \\ I_{n-1} & 0_{n-1,1} \end{pmatrix}$.

Exercice 40 ●●●○ Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang r. Montrer que $\operatorname{rg}(A^2) = r$ si et seulement si A est semblable à une matrice $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $B \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{K})$.

Exercice 41 ●●○○ Mines-Ponts PSI 2017
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n ainsi que f et g deux endomorphismes de E tels que $f^2 = g^2 = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g + g \circ f = 0$.

1. Montrer que n est pair.
2. On pose $n = 2p$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle f et g sont respectivement représentés par les matrices $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_p \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 42 ●●●○ Mines-Ponts MP 2021
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n non nulle. Soit u un endomorphisme de E tel que $u \neq u^2 = u^3$. On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des matrices de u dans toutes les bases de E. Déterminer $\max\{z(M) \mid M \in \mathscr{A}\}$, où $z(M)$ désigne le nombre de coefficients nuls dans la matrice M.

Exercice 43 ●●○○ Calculer la trace des endomorphismes suivants

1. l'endomorphisme $P \longmapsto P(aX+b)$ de $\mathbb{R}_n[X]$, où $a, b \in \mathbb{R}$.
2. **a.** l'endomorphisme $M \longmapsto M^\top$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.
   b. l'endomorphisme $M \longmapsto M^\top$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
3. l'endomorphisme $M \longmapsto AM$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, où $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 44 ●●●○ Mines-Ponts MP 2022
Soit p, q, r trois projecteurs sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. On suppose que $p + \sqrt{2}q + \sqrt{3}r$ est aussi un projecteur. Montrer que $q = r = 0$.

Exercice 45 ●●○○ Intersection non triviale de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ avec un hyperplan

1. Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note t_A la forme linéaire $M \longmapsto \operatorname{tr}(AM)$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On note en outre t l'application $A \longmapsto t_A$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$.
   a. Montrer que t est linéaire.
   b. Montrer que t est un isomorphisme.
2. Soit H un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
   a. Justifier l'existence d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ non nulle pour laquelle
   $$H = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid \operatorname{tr}(AM) = 0\}.$$
   b. Pour tout $r \in [\![0, n]\!]$, on pose $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
   Trouver une matrice $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ pour laquelle $\operatorname{tr}(J_r M) = 0$.
   c. En déduire que H contient au moins une matrice inversible.

Exercice 46 ●●●○ Mines-Ponts MP 2022
Soit $n \geqslant 2$. Montrer que tout hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.

Exercice 47 ●●○○ Mines-Ponts MP 2022 Soit $n, p \in \mathbb{N}$, avec $1 \leqslant p < n$.
Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, avec $A \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}^\top \longmapsto Y$ est un isomorphisme de $\operatorname{Ker} M$ sur $\operatorname{Ker}(D - CA^{-1}B)$.
2. En déduire que $\operatorname{rg}(M) = p$ si et seulement si $D = CA^{-1}B$.

Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note $p = \max\{\operatorname{rg}(M) \mid M \in V\}$. Le but des questions suivantes est de montrer que V est de dimension inférieure ou égale à np.

3. Pourquoi peut-on supposer, sans perte de généralité, que $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ appartient à V ?
   On fait alors cette hypothèse par la suite.
4. Soit $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^\top & A \end{pmatrix} \,\middle|\, A \in \mathscr{M}_{n-p}(\mathbb{R}), B \in \mathscr{M}_{p,n-p}(\mathbb{R}) \right\}$. Montrer que $V \cap W = \{0\}$.
5. Conclure.

Exercice 48 ●●●○ X MP 2022 Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les éléments sont de rang inférieur ou égal à r. Montrer que $\dim V \leqslant n \times r$.

Exercice 49 ●●●○ Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies non nulles et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Déterminer la dimension de

$$\mathscr{G} = \left\{ g \in \mathscr{L}(F,E) \;\middle|\; fgf = 0_{\mathscr{L}(E,F)} \right\}.$$

Exercice 50 ●●○○ Action par multiplication à gauche

On définit sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la relation binaire $\sim$ par

$$\forall A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad A \sim B \quad \Longleftrightarrow \quad (\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \quad A = PB).$$

1. Montrer que $\sim$ définit une relation d'équivalence sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

2. Montrer que deux matrices sont dans la même classe d'équivalence si et seulement si elles ont le même noyau.

Exercice 51 ●●○○ Base antéduale

Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n non nulle. Pour une base $\mathscr{B}$ de E, on note $\mathscr{B}^\star$ la base duale associée (cf. théorème 53 du chapitre 23).

1. Pour toutes bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ de E, montrer que $P_{\mathscr{B}_1^\star}^{\mathscr{B}_2^\star} = \left(\left(P_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}_2} \right)^{-1} \right)^\top$.

2. En déduire que l'application $\mathscr{B} \longmapsto \mathscr{B}^\star$ réalise une bijection de l'ensemble des bases de E sur celui des bases de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$.

On dispose ainsi, pour toute base $\mathscr{C}$ de $\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$, d'une unique base $\mathscr{B}$ de E dont la duale est $\mathscr{C}$. Cette base $\mathscr{B}$ est appelée la base antéduale de $\mathscr{C}$.

Indications

Exercice 2. On peut utiliser des polynômes interpolateurs de Lagrange.

Exercice 16. On pourra remarquer que $(AB)^2 = AB$.

Exercice 31. Interpréter la matrice de Vandermonde comme la matrice d'une application linéaire *ad hoc*.

Exercice 32. On pourra calculer le rang de la matrice des vecteurs de la famille dans une base naturelle de $E \times F$.

Exercice 39. Utiliser le résultat de la question **1** de l'exercice 23.40.

Exercice 40. On pourra penser aux résultats liés à la décomposition de Fitting.

Exercice 41. **1.** Que dire de la trace de f ou g ?

Exercice 42. On pourra commencer par montrer que $E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\big(u^2\big)$. Que dire de $u|_{\mathrm{Ker}(u^2)}$?

Exercice 44. Penser à utiliser la trace.

Exercice 48. Cf. exercice 47.

Exercice 49. Raisonner matriciellement, en pensant aux matrices J_r.

Éléments de réponses

Exercice 1. **1.** Base si et seulement si $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0, \pm 2\}$. **2.** Oui.

Exercice 4. **1.a** $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **1.b** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **1.c** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ **1.d** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1.e $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **2.a** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ **2.b** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **3.a** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **3.b** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 5. **1.** $P \cap D = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et $\dim P + \dim D = \dim \mathbb{R}^3$.

2. $p((x, y, z)) = \frac{1}{6}(5x - y - z, -2x + 4y - 2z, -3x - 3y + 3z)$.

3. Il suffit de considérer une base adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.

Exercice 7. **2.** $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}^\star, \mathscr{B}^\star}(u^\top) = (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}, \mathscr{C}}(u))^\top$.

Exercice 8. **1.** Il suffit de montrer que ψ est une application linéaire injective (pourquoi ?).

2. $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}, \mathscr{C}}(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. **3.** $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}, \mathscr{C}}(\psi^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$,

ainsi $\psi^{-1}((a, b, c)) = a + bX + \frac{c}{2}X^2$.

Exercice 9. **1.** $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}_1[X]$.

2. $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^2$ et $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}\big(X^2 - 3X - 2)\big)\big)$.

Exercice 10. **2.** $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. **3.** $A^n = (-I_3 + N)^n = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & -n & n(n+1) \\ 0 & 1 & -2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $f^{(n)} : x \longmapsto x \longmapsto (-1)^n\big(ax^2 + (b - 2na)x + n(n-1)a - nb + c\big)\,\mathrm{e}^{-x}$.

Exercice 13. **3.** Les sous-espaces stables sont $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$, les droites vectorielles $\mathrm{Vect}((1, 0, 0))$ et $\mathrm{Vect}((0, 0, 1))$, les plans vectoriels d'équations $y = 0$ et $z = 0$, et $\mathbb{R}^3$.

Exercice 15. **1.** La matrice est triangulaire... **2.** $f : P \longmapsto P(X + 1)$.

3. $f^{-1} : P \longmapsto P(X - 1)$ et $A^{-1} = \left((-1)^{j-i}\binom{j-1}{i-1}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1}$.

Exercice 16. Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. $\widehat{AB}$ est la projection sur $\mathrm{Vect}(e_2, e_1 + 2e_3)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(e_1 + e_3)$.

3. $\mathrm{Ker}\, \widehat{A} = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$, $\mathrm{Im}\, \widehat{A} = \mathrm{Im}\, \widehat{AB}$, $\mathrm{Ker}\, \widehat{B} = \mathrm{Ker}\, \widehat{AB}$ et $\mathrm{Im}\, \widehat{B} = \mathbb{R}^2$. **4.** $BA = I_2$.

Exercice 20. **1.** 2. **2.** $\begin{cases} 1 & \text{si } a = b = c \\ 3 & \text{si } (a-b)(a-c)(b-c) \neq 0 \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}$. **3.** 4. **4.** $\begin{cases} 1 & \text{si } a = 1 \\ 2 & \text{si } a = -2 \\ 3 & \text{sinon} \end{cases}$.

Exercice 21. $\mathrm{rg}\big((i + j + \alpha)^2\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \begin{cases} 0 \text{ ou } 1 & \text{si } n = 1 \\ 2 & \text{si } n = 2 \\ 3 & \text{si } n \geqslant 3. \end{cases}$

Exercice 22. Il y a surjectivité si et seulement si $(\alpha, \beta) \neq (22, 4)$.

Exercice 23. **1.** 2. **2.** 1. **3.** 2.

Exercice 26. Les sous-espaces vectoriels sont supplémentaires si et seulement si $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Exercice 31. $\big(x_i^{j-1}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est la matrice de $P \longmapsto (P(x_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\mathbb{R}^n$.

Exercice 32. $\dim \mathrm{Vect}((e_i, f_j))_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} = n + p - 1$.

Exercice 33. **1.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{pmatrix} 1 & 11 & 12 & 7 \\ -2 & -12 & -12 & -12 \\ 3 & 7 & 7 & 12 \end{pmatrix}$.

Exercice 34. **1.a** L'ensemble des solutions de $AX = \lambda X$ est $\begin{cases} \mathrm{Vect}(e_1) & \text{si } \lambda = 1 \\ \mathrm{Vect}(e_2) & \text{si } \lambda = -1 \\ \mathrm{Vect}(e_3) & \text{si } \lambda = 2 \\ \{0\} & \text{sinon.} \end{cases}$

1.c $A' = \mathrm{Diag}(1, -1, 2)$.

1.d $A^n = PA'^nP^{-1} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 3(1 - (-1)^n) & -3(1 - (-1)^n) \\ 2^n - (-1)^n & 3(-1)^n - 3 \times 2^n + 1 & 2^{n+2} - 3(-1)^n - 1 \\ 2^n - (-1)^n & 3(-1)^n - 3 \times 2^n & 2^{n+2} - 3(-1)^n \end{pmatrix}$ où

$P = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice de la famille (e_1, e_2, e_3) dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2.a L'ensemble des solutions de $AX = \lambda X$ est $\begin{cases} \mathrm{Vect}(e_1) & \text{si } \lambda = 2 \\ \mathrm{Vect}(e_2) & \text{si } \lambda = 1 \\ \mathrm{Vect}(e_3) & \text{si } \lambda = 0 \\ \{0\} & \text{sinon,} \end{cases}$ avec $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (1, -1, 0)$ et $e_3 = (1, -1, 1)$. **2.c** $A' = \mathrm{Diag}(2, 1, 0)$.

2.d $A^n = PA'^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} + 1 & 2^{n-1} & -1 \\ 2^{n-1} - 1 & 2^{n-1} & 1 \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \end{pmatrix}$, pour $n \geqslant 1$, où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice de la famille (e_1, e_2, e_3) dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 36. Les matrices semblables à J_r sont les matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A^2 = A$ et $\mathrm{rg}(A) = r$.

Exercice 37. $\left\{ \begin{pmatrix} 5d - 3c & \frac{7}{3}d - \frac{4}{3}c \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, c, d \in \mathbb{R} \text{ et } (2c - 3d)(2c - 5d) \neq 0 \right\}$.

Exercice 42. $\max = n^2 - \mathrm{rg}\, u$.

Exercice 43. **1.** $\begin{cases} n + 1 & \text{si } a = 1 \\ \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} & \text{si } a \neq 1. \end{cases}$ **2.a** 2. **2.b** n. **3.** $n\,\mathrm{tr}(A)$.

Exercice 49. $\dim \mathscr{G} = \dim E \times \dim F - (\mathrm{rg}(f))^2$.