26 | Séries numériques

Cahier de calcul : fiche 28. **Banque CCINP :** exercices 9, 14, 29, 30 et 31.

Séries définies explicitement

Exercice 1 ●○○○ Justifier que $0,99999999999999999\ldots = 1$.

Exercice 2 ●○○○ Montrer que les séries suivantes convergent et déterminer leur somme.

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. **2.** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2(-1)^n}{n!}$. **3.** (●●●) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \ln\left(\cos\frac{1}{2^n}\right)$.

Exercice 3 ●●○○ Montrer que les séries suivantes convergent et calculer leur somme :

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Exercice 4 ●○○○ Pour tout $\alpha > 1$, on pose $\zeta(\alpha) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$. Montrer que

$$\forall \alpha > 1, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^\alpha} = \left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right)\zeta(\alpha) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} = \left(1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)\zeta(\alpha).$$

Exercice 5 ●●○○ Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.
Étudier la convergence, et le cas échant la somme, de la série de terme général

$$u_n(x) = \frac{1}{\left(x + (-1)^n(x+2)\right)^n}.$$

Exercice 6 ●●○○
Étudier la nature des séries suivantes en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n\sin\left(\frac{1}{\sqrt{1+n^\alpha}}\right)$. **2.** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^\alpha$. **3.** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \exp(-\ln^\alpha n)$.

4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\alpha^n}{1+\alpha^{2n}}$. **5.** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\alpha^{\ln n}}$. **6.** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \sqrt{1 - \left(\frac{n^\alpha}{1+n^\alpha}\right)^n}$.

Exercice 7 ●○○○ Déterminer la nature des séries suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{-\mathrm{e}}{3^n + n^3}$. **2.** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$. **3.** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n(3n+1)\sqrt{n-1}}{(n-\pi)(n+7)}$.

4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sqrt[n]{2} - 1}{\sqrt{n}}$. **5.** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$. **6.** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(\cos\frac{1}{2n}\right)$.

7. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right)$. **8.** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\sqrt[n^2]{3} - 1\right)$. **9.** $\displaystyle\sum \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^2+1}$

Exercice 8 ●●○○ **Séries de Bertrand** On appelle *série de Bertrand* toute série de la forme

$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n} \qquad \text{avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Pour tous $\alpha > 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$, déterminer un réel $\gamma > 1$ pour lequel $\displaystyle\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$.
Conclusion ?

2. Pour tous $\alpha < 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$, déterminer un réel $\gamma < 1$ pour lequel $\displaystyle\frac{1}{n^\gamma} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}\right)$.
Conclusion ?

3. Supposons $\alpha = 1$ et $\beta \leqslant 0$. À l'aide d'une minoration, montrer que la série diverge.

4. Supposons $\alpha = 1$ et $\beta > 0$.

a. Déterminer une primitive de $f : t \longmapsto \dfrac{1}{t\ln^\beta t}$ sur $]1, +\infty[$.

b. Pour tout $k \geqslant 3$, montrer que $\displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^k f(t)\,\mathrm{d}t$.

c. Conclure.

5. Énoncer une condition nécessaire et suffisante de convergence des séries de Bertrand.

Exercice 9 ●○○○ **Banque d'exercices CCINP 2024 (5)**

1. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$, où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

a. **Cas** $\alpha \leqslant 0$. En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.

b. **Cas** $\alpha > 0$. Étudier la nature de la série.
Indication : on pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.

2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} \frac{\left(\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) \times \mathrm{e}^{1/n}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.

Exercice 10 ●●○○ — Série géométrique dérivée, formule du binôme négatif

1. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$. Montrer que la série $\sum_{n \geqslant p} n(n-1)\dots(n-p+1)z^{n-p}$, dite *dérivée* p^e *de la série géométrique de raison* z, converge si et seulement si $|z| < 1$.
2. Montrer que, pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| < 1$,

$$\sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1)z^{n-p} = \frac{p!}{(1-z)^{p+1}}.$$

3. En déduire la *formule du binôme négatif* : pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n = \frac{1}{(1-z)^{p+1}}.$$

Exercice 11 ●●○○ — Somme de la série harmonique alternée

1. **a.** Écrire la formule de Taylor reste intégral à l'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ pour la fonction $t \longmapsto \ln(1+t)$ entre 0 et x, pour tout $x \in \,]-1\,,+\infty[$.
   b. En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln 2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \int_0^1 \frac{(t-1)^n}{(1+t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t.$$

   c. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{(t-1)^n}{(1+t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t = 0$.
   d. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.
2. **a.** En remarquant que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1}\,\mathrm{d}t$, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} = \int_0^1 \frac{(-t)^n - 1}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

   b. Justifier que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t = 0$.
   c. Retrouver le résultat de la question **1**.

Exercice 12 ●●○○ — Une série géométrique « intégrée »

Soit $q \in [0\,,1[$. Cet exercice vise à calculer la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{q^i}{i}$.

1. Montrer que la série considérée converge.
2. *Calcul de la somme 1.*
   a. Écrire la formule de Taylor reste intégral à l'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ pour la fonction $x \longmapsto -\ln(1-x)$ entre 0 et q.
   b. En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad -\ln(1-q) = \sum_{i=1}^{n} \frac{q^i}{i} + \int_0^q \frac{(q-t)^n}{(1-t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t.$$

   c. Étudier la fonction $t \longmapsto \dfrac{q-t}{1-t}$ puis montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^q \frac{(q-t)^n}{(1-t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t = 0$.
   d. Conclure.
3. *Calcul de la somme 2.*
   Retrouver le résultat précédent en s'inspirant de la question **2** de l'exercice 11.

Exercice 13 ●○○○ — Étudier la nature des séries suivantes, où $z \in \mathbb{C}$.

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n^n}$. **2.** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n\ln(n) z^n$. **3.** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\binom{2n}{n}}$.

Exercice 14 ●○○○ — Banque d'exercices CCINP 2024 (46)

On considère la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

1. Prouver que $\pi\sqrt{n^2+n+1} \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \alpha\dfrac{\pi}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, où α est un réel que l'on déterminera.
2. En déduire que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.
3. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge-t-elle absolument ?

Exercice 15 ●●○○

Étudier la convergence absolue et la convergence des séries suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$. **2.** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \sin\left(\frac{(-1)^n\pi}{3n}\right)$. **3.** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} (-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n}}{\ln n}$.

Exercice 16 ●●○○ — Mines-Ponts
On désigne par $p(n)$ le nombre de chiffre de l'écriture en base 10 de l'entier n.
Établir la convergence et calculer la somme de la série de terme général $\dfrac{p(n)}{n(n+1)}$.

Exercice 17 ●●●○ — Mines-Ponts MP 2022
Déterminer la nature de la série $\sum \sin\left(\pi\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right)$.

Exercice 18 ●●●○ — Mines-Ponts MP 2022
Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{\sin(2\pi\,\mathrm{e}\,n!)}{\ln n}$.

Exercice 19 ●●●○ — Mines-Ponts MP 2022
Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(\tan\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\right)\right)$.

Indication : commencer par établir que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} = \operatorname{Arctan} x$, *pour* $x \in \,]-1\,,1]$.

Exercice 20 ●●○○ — Montrer qu'il existe un réel ℓ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{=} 2\sqrt{n} + \ell + o(1),$$

en calculant un développement asymptotique de $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 21 ●●○○ — Centrale Soit $a > 0$.
Étudier la nature de la série de terme général a^{h_n}, où $h_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}$.

Exercice 22 ●●○○ —

1. Déterminer un développement asymptotique de $(n+1)\ln(n+1) - n\ln n$ à l'ordre $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$.
2. En déduire que $\displaystyle n\ln n - \ln(n!) - (n-1) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ell + o(1)$, où $\ell \in \mathbb{R}$.
3. Retrouver à une constante près la formule de Stirling.

Exercice 23 ●●○○ — Mines-Ponts MP 2022 Soit les suites de terme général

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{n^n\,\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right).$$

1. Montrer que la série de terme général v_n est convergente.
2. En déduire l'existence de $C > 0$ tel que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} C\sqrt{n}n^n\,\mathrm{e}^{-n}$.

Exercice 24 ●●○○ — Mines-Ponts MP 2022 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k \ln k}{k}, x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}, v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}, w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{k} \text{ et } H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Montrer l'existence de $\ell \in \mathbb{R}$, que l'on déterminera, tel que $x_n \underset{n\to+\infty}{=} \ell + O\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
2. Exprimer u_n en fonction de v_n et w_n.
3. Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$.
4. Montrer que la suite (u_n) converge et exprimer sa limite en fonction de γ.

Exercice 25 ●●●○ — Mines-Ponts MP 2022

1. Montrer que, pour tout $x > 0$, $\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x+2}} - \dfrac{2}{\sqrt{x+1}} \geqslant 0$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'existence de $\displaystyle R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$.
3. Quelle est la nature de $\sum R_n$?

Exercice 26 ●●●○ — Mines-Ponts MP 2022
Déterminer la nature de la série de terme général $\displaystyle u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

Exercice 27 ●●○○ — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n\,\mathrm{e}^{-u_n}.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive.
2. Établir la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer sa limite.
3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln u_n$. Montrer alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} u_k = v_0 - v_{n+1}.$$
4. En déduire la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 28 ●●○○ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - u_n^3.$$

1. **a.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0\,,1[$.
   b. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
2. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n^3$?
3. **a.** Montrer que u_{n+1} est équivalent à u_n.
   b. En déduire que $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$ est équivalent à u_n.
   c. Conclure quant à la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$.

Séries abstraites

Exercice 29 ●○○○ **Banque d'exercices CCINP 2024 (8)**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.

1. **a.** Démontrer que la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente.

   Indication : on pourra considérer $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *avec* $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.

   b. Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^k u_k$.
2. **a.** Étudier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n \mathrm{e}^{-nx}}{n}$.
   b. *Programme de deuxième année.*

Exercice 30 ●○○○ **Banque d'exercices CCINP 2024 (7)**

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs.
   On suppose que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang. Montrer que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \quad \Longrightarrow \quad \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$

2. Étudier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{((-1)^n + i) \ln n \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n+3} - 1}$.

Exercice 31 ●○○○ **Banque d'exercices CCINP 2024 (6)**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et $\ell \in [0\,,1[$.

1. Démontrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, alors la série $\sum u_n$ converge.

   Indication : écrire, judicieusement, la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, *puis majorer, pour* n *assez grand,* u_n *par le terme général d'une suite géométrique.*
2. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n!}{n^n}$?

Exercice 32 ●●○○ **Règle de Raab-Duhamel** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes strictement positifs telle qu'il existe deux réels α et β avec $\beta > 1$ pour lesquels

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right).$$

La règle de Raab-Duhamel permet l'étude de séries relevant du cas douteux de la règle de d'Alembert.

1. **a.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = \ln(n^\alpha u_n)$.
   Étudier la nature de la série $\sum (v_{n+1} - v_n)$.
   b. En déduire qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n^\alpha}$.
   c. En déduire les valeurs de α pour lesquelles la série $\sum u_n$ converge.
2. *Applications.*
   a. Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 > 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{n+x}{n+y} u_n$$

   Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.
   b. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 1} x^{H_n}$ où $(H_n)_{n\geqslant 1}$ désigne la série harmonique.
   c. Étudier la nature de la série $\sum \dbinom{2n}{n} \dfrac{1}{2^{2n} n}$, sans utilsier les formules de Wallis et de Stirling.

Exercice 33 ●●○○ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites rélles positives. On suppose que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent.

1. a. Montrer que la série $\sum u_n v_n$ converge.
   b. Et sans l'hypothèse de positivité ?
2. Étudier la nature des séries $\sum \sqrt{u_n v_n}$ et $\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}$.

Exercice 34 ●●●○ Mines-Ponts MP 2022 Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle décroissante qui converge vers 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = n(u_n - u_{n+1})$.
Montrer que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la série $\sum v_n$ converge et que, dans ce cas, les deux séries ont la même somme.

Exercice 35 ●●●○ Mines-Ponts MP 2022
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle qui ne s'annule pas et telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} -1 + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Discuter la convergence de $\sum u_n$.

Comparaison série-intégrale

Exercice 36 ●●○○
Déterminer un équivalent simple lorsque n tend vers $+\infty$ de sommes suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}$.
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+\sqrt{k}}$.
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$, avec $\alpha \in \left]0\,,1\right[$.
4. $\ln(n!)$.

Exercice 37 ●●●○

1. Montrer qu'il existe un réel ℓ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(\ln n)^2}{2} + \ell + o(1)$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln k}{k} = \ln 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\ln k}{k}.$$
3. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\ln k}{k} = \gamma \ln 2 - \frac{(\ln 2)^2}{2}$.

Exercice 38 ●●○○ Centrale

1. Pour quelles valeurs du réel α le nombre $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} (k+1)^{-\alpha}$ est-il défini ?
2. Le cas échéant, étudier la nature de la série de terme général u_n.

Séries de fonctions

Exercice 39 ●●●○

1. Déterminer le domaine de définition de $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 40 ●●○○

1. Montrer que $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n + x}$ est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Établir que, pour tout réel x, $f(2x) = \dfrac{1}{2} f(x) + \dfrac{1}{1+2x}$.
3. Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
4. En déduire que f admet une limite en $+\infty$ et la déterminer.

Exercice 41 ●●○○ Pour tous $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{x+k}$.

1. Montrer que, pour tout $x > 0$, la suite $(S_n(x))_{n\geqslant 0}$ converge. On note $S(x)$ sa limite.
2. a. Soit a un réel strictement positif. Montrer que
$$\forall (x, x_0) \in [a\,, +\infty[^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |S_n(x) - S_n(x_0)| \leqslant |x - x_0| \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(a+k)^2}.$$
   b. En déduire que la fonction S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Trouver une relation entre $S(x+1)$ et $S(x)$ et en déduire un équivalent de $S(x)$ lorsque x tend vers 0^+.

Exercice 42 ●●●○ — Construction alternative de l'exponentielle

On oublie dans cette exercice l'existence de la fonction exponentielle.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge. On note alors $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.
2. Justifier que, pour tous $x \in \mathbb{R}$, $h \in [-|x|, |x|]$ et $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$,
$$\left|(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1}\right| \leqslant \frac{h^2}{2} n(n-1)(2|x|)^{n-2}.$$
On remarquera que cette inégalité reste vraie pour $n = 1$ lorsque $x \neq 0$.
3. En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f' = f$.

Sommation des relations de comparaison

Exercice 43 ●●○○ — Mines-Ponts MP 2022

Soit $(u_n)_{n \geqslant 0} \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}}$ convergeant vers 0. On suppose qu'il existe $\lambda < 0$ et $\alpha > 1$ tels que
$$u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{=} u_n + \lambda u_n^\alpha + o(u_n^\alpha).$$
Étudier la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 44 ●●○○ — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par
$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sin u_n.$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. **a.** Montrer que $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{3}$.

   b. En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$, puis la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.
3. **a.** Montrer que $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{15}$.

   b. Utiliser la sommation des relations de comparaison pour aboutir à
$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{3\sqrt{3}}{10}\frac{\ln n}{n^{3/2}} + o\left(\frac{\ln n}{n^{3/2}}\right).$$

Exercice 45 ●●○○ — Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite définie par
$$u_0 > 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \ln(u_n).$$
Déterminer un équivalent de cette suite.

Exercice 46 ●●○○ — Montrer qu'il existe un réel C tel que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{=} C - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{30n^5} + o\left(\frac{1}{n^5}\right).$$

Exercice 47 ●●●○ — Au tour de la formule de Stirling

1. À l'aide d'un développement asymptotique de $\sum_{k=1}^{n} \ln k$ déterminer, à une constante multiplicative près, un équivalent de $n!$.
2. Après avoir rappelé la formule de Stirling, montrer que
$$\frac{n!\,\mathrm{e}^n}{n^{n+1}} \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}\left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Exercice 48 ●●○○ — Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$ telle que $\lim_{+\infty} \frac{f'}{f} = -\infty$.

1. Montrer que $\sum f(n)$ converge.
2. Déterminer un équivalent de $\sum_{k=n}^{+\infty} f(k)$.

Exercice 49 ●●●○ — X MP 2022 Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ de même degré $d \geqslant 1$. On écrit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{d} b_k X^k$ et on suppose que $\frac{a_{d-1}}{a_d} \neq \frac{b_{d-1}}{b_d}$.
Soit $u \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{P(n)}{Q(n)}$, pour n assez grand. Montrer qu'il existe trois constantes a, b, c telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} an^b c^n$ et $a > 0$.

Exercice 50 ●●●● — X-ENS 2021 Trouver un équivalent de $\left(\prod_{k=1}^{n} k^k\right)^{1/n}$.

Indications

Exercice 2. **3.** Faire apparaître une situation de télescopage.

Exercice 16. Commencer par établir la convergence, puis déterminer sur quels intervalles d'entiers l'expression $p(n)$ est constante.

Exercice 17. Se ramener à $\sum \sin\left(\pi\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right)$.

Exercice 18. Écrire e sous la forme d'une somme de série et tirer parti des propriétés de la fonction sinus.

Exercice 25 et 26. Le CSSA, le CSSA, le CSSA !

Exercice 43. On pourra commencer par déterminer un équivalent de $u_{n+1}^{\beta} - u_n^{\beta}$ puis choisir opportunément β.

Éléments de réponses

Exercice 2. **1.** $1/4$. **2.** 0. **3.** $\ln(\sin(2)/2)$.

Exercice 3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \operatorname{ch} x$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \operatorname{sh} x$.

Exercice 5. La série converge si et seulement si $x \in \left]-\infty\,, -3/2\right[\cup \left]-1/2\,, +\infty\right[$ et, le cas échéant, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \frac{4(x+1)^2}{(2x+1)(2x+3)} - \frac{2}{3}$.

Exercice 6. La série converge si et seulement si...
1. $\alpha > 4$. **2.** $\alpha > 2$. **3.** $\alpha > 1$. **4.** $|\alpha| \neq 1$. **5.** $\alpha > 1$. **6.** $\alpha > 3$.

Exercice 7. **1.** Converge. **2.** Converge. **3.** Diverge grossièrement. **4.** Converge. **5.** Diverge. **6.** Converge. **7.** Diverge. **8.** Converge. **9.** Converge.

Exercice 8. **5.** La série de Bertrand converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou si $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Exercice 9. **1.** Cas particuliers des séries de Bertrand.
2. Converge, car le terme général positif équivaut à $\dfrac{\mathrm{e}}{8n\ln^2 n}$.

Exercice 13. **1.** Converge pour tout $z \in \mathbb{C}$. **2.** Converge si et seulement si $|z| < 1$. **3.** Converge.

Exercice 14. **1.** $\alpha = 3/8$. **2.** $\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{=} (-1)^{n+1}\dfrac{3\pi}{8n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
3. La série est semi-convergente.

Exercice 15. **1.** Semi-convergente. **2.** Semi-convergente. **3.** Grossièrement divergente.

Exercice 16. $9/10$.

Exercice 17. $\left|\sin\left(\pi\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right)\right| = \left|\sin\left(\pi\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right)\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \pi\left(2-\sqrt{3}\right)^n$, par conséquent la série converge (absolument).

Exercice 18. $\dfrac{\sin(2\pi n!\,\mathrm{e})}{\ln n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2\pi}{n\ln n}$ et la série diverge.

Exercice 21. $\sum a^{h_n}$ converge si et seulement si $a \in \left]0\,, 1/\mathrm{e}\right[$.

Exercice 22. **1.** $(n+1)\ln(n+1) - n\ln n \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + 1 + \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{6n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
2. En posant $u_n = n\ln n - \ln(n!) - (n-1) + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$, on a $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{3n^2}$.

Exercice 24. **1.** $\ell = \ln 2$. **2.** $u_n = w_{\lfloor n/2\rfloor} - v_n$. **4.** $\gamma\ln 2 - \ln^2 2/2$.

Exercice 25. **3.** La série converge.

Exercice 26. La série converge.

Exercice 27. **2.** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. **4.** La série diverge.

Exercice 28. **1.b.** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. **2.** La série converge (télescopage). **3.c.** La série diverge.

Exercice 29. **1.** Cours. **2.a.** Converge si et seulement si $x \geqslant 0$.

Exercice 30. **1.** Cours. **2.** La série converge.

Exercice 31. **1.** Cours. **2.** La série converge.

Exercice 32. **1.c.** $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. **2.a** Converge si et seulement si $y > x+1$. **2.b** Converge si et seulement si $x \in \left]0\,, 1/\mathrm{e}\right[$. **2.c** Converge.

Exercice 33. **1.b** $u_n = v_n = (-1)^n/\sqrt{n}$ fournit un contre-exemple.
2 Les deux séries convergent.

Exercice 36. **1.** $\ln(\ln n)$. **2.** $\ln n$. **3.** $\dfrac{n^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}$. **4.** $n\ln n$ (cf. remarque 28 du chapitre 24).

Exercice 38. **1.** $\alpha > 1$. **2.** La série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 2$.

Exercice 39. **1.** f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. **2.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

Exercice 40. **4.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exercice 41. **3.** $S(x+1) = \dfrac{1}{x} - S(x)$ et $S(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

Exercice 43. La série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha \in \left]1\,, 2\right[$.

Exercice 48. $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} f(n)$.

Exercice 49. Il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{\ell}\, n^{\alpha}\left(\dfrac{a_d}{b_d}\right)^n$, avec $\alpha = \dfrac{a_{d-1}}{a_d} - \dfrac{b_{d-1}}{b_d}$.

Exercice 50. $\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k^k\right)^{1/n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{(n+1)/2}\,\mathrm{e}^{-n/4}$.