

# 25 | Intégration

Cahier de calcul :  $\emptyset$ .

Banque CCINP :  $\emptyset$ .

## Calculs de primitives et d'intégrales

— **Exercice 1** ●○○○ —  Calculer les intégrales suivantes.

1.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin(3x) dx.$
2.  $\int_3^4 \frac{4}{t(t^2 - 4)} dt.$
3.  $\int_0^1 \max\{e^t, 2\} dt.$
4.  $\int_0^n e^{|t|} dt,$  avec  $n \in \mathbb{N}.$
5.  $\int_{-1}^2 x|x| dx.$
6.  $\int_0^1 x(\text{Arctan } x)^2 dx.$

— **Exercice 2** ●○○○ —  Déterminer une primitive des fonctions suivantes.

1.  $t \mapsto \frac{1}{t-z},$  avec  $z \in \mathbb{C}.$
2.  $x \mapsto \text{ch } x \cos x.$
3.  $x \mapsto x^\alpha \ln x,$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}.$
4. Arcsin.

— **Exercice 3** ●○○○ —

1. Justifier, pour tous  $p \in \mathbb{N}$  et  $q \in \llbracket 0, p \rrbracket,$  l'existence de l'intégrale

$$I_{p,q} = \int_0^1 x^p (\ln x)^q dx.$$

2. Exprimer  $I_{p,q}$  en fonction de  $I_{p,q-1},$  pour tous  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $q \in \llbracket 1, p \rrbracket.$
3. En déduire une expression de  $I_{n,n},$  pour tout  $n \in \mathbb{N}.$

— **Exercice 4** ●○○○ —  On pose  $I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{\cos^2 t}{\cos(2t)} dt$  et  $J = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{\sin^2 t}{\cos(2t)} dt.$

1. Calculer  $I + J$  en posant  $x = \tan t.$
2. En déduire  $I$  et  $J.$

## Divers

— **Exercice 5** ●○○○ —  **Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire**

Soit  $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}),$  avec  $a < b.$  À quelle condition a-t-on

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \int_a^b |f(t)| dt ?$$

Que dire lorsque  $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C}) ?$

— **Exercice 6** ●○○○ — Soit  $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}).$

1. Montrer que si  $\int_0^1 f(t) dt = 0,$   $f$  s'annule au moins une fois.
2. Montrer que si  $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2},$   $f$  admet un point fixe.

— **Exercice 7** ●○○○ —  Soit  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$

Montrer que les fonctions suivantes sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et calculer leur dérivée.

1.  $x \mapsto \int_0^x f(t+x) dt.$
2.  $x \mapsto \int_0^{2\pi} f(x-t) \cos t dt.$

— **Exercice 8** ●○○○ —  Considérons  $F : x \mapsto \int_1^2 \frac{\sin(xu)}{u^{3/2}} du$  définie sur  $\mathbb{R}_+.$

1. Montrer que  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  et dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*.$  Calculer sa dérivée.
2. Montrer que  $F$  est dérivable en 0.

On pourra commencer par établir que  $1 - \frac{y^2}{6} \leq \frac{\sin y}{y} \leq 1,$  pour tout  $y \in \mathbb{R}^*.$

— **Exercice 9** ●○○○ — **Mines-Ponts MP 2022** Soit  $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}).$

1. Soit  $n \in \mathbb{N}.$  On suppose que  $\int_0^1 f(x)x^k dx = 0,$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket.$  Montrer que  $f$  s'annule au moins  $n + 1$  fois.
2. On suppose que  $\int_0^1 f(x)x^k dx = 0,$  pour tout  $k \in \mathbb{N}.$  Montrer que  $f = 0.$

— **Exercice 10** ●○○○ — Soit  $P = a_n X^n + \dots + a_0 \in \mathbb{C}[X].$

1. Calculer  $\int_0^{2\pi} P(e^{it}) e^{-ikt} dt,$  pour tout  $k \in \mathbb{N}.$
2. Justifier l'existence de  $\sup_{\cup} |P|,$  puis montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}, |a_k| \leq \sup_{\cup} |P|.$

— **Exercice 11** ●●○○ — **Formules de la moyenne** Soit  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$ .

1. **Première formule de la moyenne.** Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues par morceaux sur  $[a, b]$ , avec  $g$  positive sur  $[a, b]$ .

a. Montrer que, si  $m = \inf_{[a,b]} f$  et  $M = \sup_{[a,b]} f$ , alors on a

$$m \int_a^b g(t) dt \leq \int_a^b f(t)g(t) dt \leq M \int_a^b g(t) dt.$$

b. En déduire que si  $f$  et  $g$  sont continues sur  $[a, b]$ , il existe  $c \in [a, b]$  tel que

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = f(c) \int_a^b g(t) dt.$$

2. **Seconde formule de la moyenne.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  positive, décroissante, de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue. On définit  $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$\forall x \in [a, b], \quad G(x) = \int_a^x g(t) dt.$$

On note  $m = \min_{[a,b]} G$  et  $M = \max_{[a,b]} G$ .

a. Justifier l'existence de  $m$  et  $M$ .

b. Via une intégration par parties, montrer que

$$mf(a) \leq \int_a^b f(t)g(t) dt \leq Mf(a).$$

c. En déduire qu'il existe  $c \in [a, b]$  tel que

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = f(a) \int_a^c g(t) dt.$$

— **Exercice 12** ●●○○ —

Soit  $I$  un intervalle,  $a, b \in I$  et  $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$  une fonction qui ne s'annule pas sur  $I$ .

1. Vérifier que  $f = f(a)e^g$  sur  $I$ , où  $g : x \mapsto \int_a^x \frac{f'(t)}{f(t)} dt$ .

2. Montrer que si  $f(a) = f(b)$ , le nombre complexe  $\frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{f'(t)}{f(t)} dt$  est un entier relatif.

— **Exercice 13** ●●○○ — **🔗 Mines-Ponts MP 2022** Soit  $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ .

On définit  $F$  sur  $]0, 1]$  par  $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ .

1. Montrer que  $F$  est prolongeable en une fonction continue sur  $[0, 1]$ .

2. Montrer que  $\int_0^1 F^2(t) dt \leq 2 \int_0^1 F(t)f(t) dt$ .

3. En déduire que  $\int_0^1 F^2(t) dt \leq 4 \int_0^1 f(t)^2 dt$ .

(On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz (cf. exercice 14))

— **Exercice 14** ●●○○ — **Inégalités de Cauchy-Schwarz, Minkowski et Opial**

1. Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues par morceaux sur  $[a, b]$ .

a. Montrer que la fonction  $\lambda \mapsto \int_a^b (\lambda f(t) + g(t))^2 dt$  est une fonction polynomiale de signe constant.

b. En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left( \int_a^b f(t)g(t) dt \right)^2 \leq \left( \int_a^b f^2(t) dt \right) \left( \int_a^b g^2(t) dt \right).$$

c. Montrer que si  $f$  et  $g$  sont continues sur  $[a, b]$ , on a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si et seulement si  $f$  et  $g$  sont colinéaires.

2. a. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, démontrer l'inégalité de Minkowski

$$\left( \int_a^b (f(t) + g(t))^2 dt \right)^{1/2} \leq \left( \int_a^b f^2(t) dt \right)^{1/2} + \left( \int_a^b g^2(t) dt \right)^{1/2}.$$

b. Montrer que si  $f$  et  $g$  sont continues sur  $[a, b]$ , on a égalité dans l'inégalité de Minkowski si et seulement si  $f$  et  $g$  sont positivement colinéaires.

3. (●●●) Soit  $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  vérifiant  $f(0) = 0$ . On note  $F$  l'unique primitive de  $|f'|$  qui s'annule en 0.

a. Montrer que  $\int_0^a |f(t)f'(t)| dt \leq \int_0^a F(t)F'(t) dt$ .

b. En déduire l'inégalité d'Opial

$$\int_0^a |f(t)f'(t)| dt \leq \frac{a}{2} \int_0^a f'(t)^2 dt.$$

## Sommes de Riemann

— **Exercice 15** ●●○○ —  Déterminer les limites des suites suivantes.

1.  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$ .
2.  $u_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{n+k}$ .
3.  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}$ .
4.  $u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \lfloor \sqrt{k} \rfloor$ .
5.  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos^2 \frac{k\pi}{n}$ .
6.  $u_n = \frac{1}{n^{x+1}} \sum_{k=1}^n k^x$ , avec  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .
7.  $u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{k(n-k)}$ .
8.  $u_n = \left( \frac{(2n)!}{n^n n!} \right)^{1/n}$ .
9. (●●●)  $u_n = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k e^{k/2n}$ .

— **Exercice 16** ●●○○ —

À l'aide de somme de Riemann, calculer des équivalents des suites suivantes.

1.  $\sum_{k=1}^n k^\alpha$  avec  $\alpha > 0$ .
2.  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+2k)^3}$ .
3.  $\sum_{k=1}^n k \cos\left(\frac{\pi k^2}{2n^2}\right)$ .

— **Exercice 17** ●●○○ —  **Mines-Ponts MP 2022** Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n} + \frac{k}{n^2}\right).$$

Étudier la limite éventuelle de  $(u_n)_{n \geq 1}$ .

— **Exercice 18** ●●○○ —  **Mines-Ponts MP 2022**

Donner un équivalent de  $\prod_{k=1}^n (k^2 + n^2)^{1/n}$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

— **Exercice 19** ●●○○ —

1. Montrer que, pour tout  $x \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ ,  $|\ln(1+x) - x| \leq 2x^2$ .
2. Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \exp\left(\int_0^1 f(t) dt\right).$$

3. Que vaut  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$ ?

— **Exercice 20** ●●○○ — Montrer que si  $f$  est une fonction continue et monotone sur  $[a, b]$ , avec  $a < b$ , alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\left| \int_a^b f(t) dt - \frac{G_n + D_n}{2} \right| \leq (b-a) \frac{|f(b) - f(a)|}{2n},$$

$$\text{où } G_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \text{ et } D_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$

— **Exercice 21** ●●○○ —  **Mines-Ponts MP 2022 (intégrale de Poisson)**

1. Montrer que  $I(x) = \int_0^\pi \ln(x^2 - 2x \cos t + 1) dt$  est définie pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ .
2. Décomposer en facteurs irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$  le polynôme  $X^{2n} - 1$ , où  $n \in \mathbb{N}^*$ .
3. En utilisant une somme de Riemann, calculer  $I(x)$ .

— **Exercice 22** ●●○○ — **Inégalité de Jensen** Montrer que si  $f$  est une fonction convexe et continue sur  $\mathbb{R}$  et si  $\varphi$  est continue sur  $[a, b]$ , avec  $a < b$ , alors

$$f\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(t) dt\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(\varphi(t)) dt.$$

## Limites et calculs asymptotiques

— **Exercice 23** ●●○○ —  Étudier les limites suivantes.

1.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{e^t + 1} dt$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt$ .
3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2} \int_x^{x+1/x} e^{-u^2} du$ .

— **Exercice 24** ●●○○ —  Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ . Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \int_0^1 f(xt) dx$$

et interpréter géométriquement.

— **Exercice 25** ●●○○ —  Mines-Ponts MP 2021

Soit  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  telle que  $\lim_{+\infty} f = \ell \in \mathbb{R}$ . Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_0^n f(t) dt$ .

— **Exercice 26** ●●○○ — Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et positive sur  $[a, b]$ . On souhaite démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_a^b (f(t))^n dt \right)^{1/n} = M, \quad \text{où } M = \sup_{[a,b]} f.$$

1. Examiner le cas  $M = 0$ .

Dans la suite, on suppose  $M > 0$  et on fixe  $\varepsilon \in ]0, M[$ .

2. Justifier l'existence d'un intervalle  $[\alpha, \beta]$ , avec  $\alpha < \beta$ , tel que  $f(t) \geq M - \varepsilon$ , pour tout  $t \in [\alpha, \beta]$ .

3. Montrer que

$$(\beta - \alpha)^{1/n} (M - \varepsilon) \leq \left( \int_a^b (f(t))^n dt \right)^{1/n} \leq (b - a)^{1/n} M.$$

et conclure.

— **Exercice 27** ●●○○ — Soit  $f$  une fonction continue et strictement croissante sur  $[0, 1]$  et telle que  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t)^n dt = 0$ .

— **Exercice 28** ●●○○ —  Soit  $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ . Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t)^n dt = f(0).$$

— **Exercice 29** ●○○○ —   Comparer au voisinage de  $+\infty$  les fonctions

$$x \mapsto e^{x^2} \quad \text{et} \quad x \mapsto \int_0^x e^{t^2} dt.$$

— **Exercice 30** ●●○○ — Mines-Ponts MP 2021 Soit  $a > 0$ ,  $g \in \mathcal{C}([0, a], \mathbb{R})$  telle que  $g(0) \neq 0$  et  $F : x \mapsto \int_0^a g(t) e^{-xt} dt$ . Montrer que  $F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{g(0)}{x}$ .

— **Exercice 31** ●●○○ —  On considère la suite  $(I_n)_{n \geq 0}$  définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt.$$

1. Montrer que  $(I_n)_{n \geq 0}$  converge et déterminer sa limite.

2. En déduire un équivalent de la suite  $(J_n)_{n \geq 0}$  définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad J_n = \int_0^1 t^n \ln(1+t^2) dt.$$

— **Exercice 32** ●●○○ — On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $F(n) = \int_0^\pi \frac{|\sin(nt)|}{t} dt$ .

1. Justifier proprement la définition de  $F$ .

2. a. Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , montrer l'inégalité  $\frac{2}{(k+1)\pi} \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \leq \frac{2}{k\pi}$ .

b. En déduire l'équivalent  $F(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\pi} \ln n$ .

— **Exercice 33** ●●○○ — On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}$ .

1. Calculer  $u_0$ ,  $u_1$  et  $u_2$ .

2. Montrer que  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ .

— **Exercice 34** ●●○○ —  Soit  $f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ . Déterminer un développement asymptotique de  $\int_0^1 t^n f(t) dt$  à la précision  $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

— **Exercice 35** ●●○○ —

1. Montrer que, pour tout  $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ ,

$$\int_0^1 e^{-xt} f(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} O\left(\frac{1}{x}\right).$$

2. Soit  $f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ . Déterminer un développement asymptotique au voisinage de  $+\infty$  de  $\int_0^1 e^{-xt} f(t) dt$  à la précision  $O\left(\frac{1}{x^3}\right)$ .

## Formules de Taylor

— **Exercice 36** ●○○ — Soit  $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$  et  $a \in I$ .

Montrer que la fonction  $x \mapsto \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt$  est une primitive  $n^e$  de  $f$  sur  $I$ .

— **Exercice 37** ●○○ — Montrer que, pour tout  $x \in [0, \pi]$ ,

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

— **Exercice 38** ●○○ — Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\sin x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{et} \quad \cos x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

— **Exercice 39** ●○○ — **Formule du binôme négatif**

Montrer que, pour tous  $r \in \mathbb{N}$  et  $x \in ]-1, 1[$ ,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^p \binom{k+r}{r} x^k = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}.$$

— **Exercice 40** ●○○ — ☹ Soit  $\lambda > 0$  et  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

On suppose que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f^{(n)}(0) = 0$  et, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $|f^{(n)}(t)| \leq \lambda^n n!$ .

1. Montrer que  $f$  est nulle sur  $[-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}]$ .

2. En déduire que  $f$  est même nulle sur  $\mathbb{R}$  tout entier.

— **Exercice 41** ●○○ — **Inégalité de Kolmogorov**

Soit  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . On suppose  $f$  et  $f''$  bornées sur  $\mathbb{R}$  et on considère  $M$  et  $M''$  des majorants respectifs de  $|f|$  et  $|f''|$  sur  $\mathbb{R}$ .

1. Montrer que, pour tous  $x, h \in \mathbb{R}$ ,

$$|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leq \frac{h^2}{2} M'' \quad \text{et} \quad |f(x-h) - f(x) + hf'(x)| \leq \frac{h^2}{2} M''.$$

2. En déduire que, pour tous  $x \in \mathbb{R}$  et  $h \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$|f'(x)| \leq \frac{M}{h} + \frac{h}{2} M''$$

puis que  $f'$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ .

3. En déduire, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , l'inégalité de Kolmogorov  $|f'(x)| \leq \sqrt{2MM''}$ .

Remarque : cette inégalité se généralise pour une fonction de classe  $\mathcal{C}^k$ .

— **Exercice 42** ●○○ — Soit  $f : x \mapsto \int_0^1 \sin(xt^2) dt$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

1. Montrer que  $f$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$ .

2. a. Montrer que, pour tous  $t \in [0, 1]$  et  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$|\sin(yt^2) - \sin(xt^2)| \leq |y - x|.$$

b. En déduire que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

3. Montrer que, pour tous  $t \in [0, 1]$  et  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$|\sin(yt^2) - \sin(xt^2) - (y-x)t^2 \cos(xt^2)| \leq \frac{1}{2} |y-x|^2.$$

4. En déduire que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f'(x) = \int_0^1 t^2 \cos(xt^2) dt.$$

## Indications

**Exercice 7. 2.** Procéder à un changement de variable.

**Exercice 13. 2.** Procéder à une IPP après avoir déterminé qui est  $F'$ .

**Exercice 15. 7.** Pour calculer  $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx$  on pourra procéder au changement de variable  $x = \sin^2 t$ .

**Exercice 17.** Montrer que  $(u_n)$  a la même limite que la suite de terme général  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ .

**Exercice 28.** On pourra majorer la différence  $\left| \int_0^1 f(t^n) dt - f(0) \right|$ , via un découpage du segment  $[0, 1]$  en  $[0, 1 - \varepsilon]$  et  $[1 - \varepsilon, 1]$ .

**Exercice 29.** On pourra utiliser la majoration  $t^2 \leq tx$  sur  $[0, x]$ .

**Exercice 40. 2.** On sait dorénavant que les dérivées  $f^{(n)}$  sont nulles sur  $[-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}]$ ...

## Éléments de réponses

**Exercice 1. 1.**  $\frac{7}{15}$ . **2.**  $\frac{3}{2} \ln 3 - \frac{1}{2} \ln 5 - \ln 2$ . **3.**  $2 \ln 2 + e - 2$ . **4.**  $\frac{e^n - 1}{e - 1}$ . **5.**  $\frac{7}{3}$ . **6.**  $\frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}$ .

**Exercice 2. 1.**  $t \mapsto \frac{1}{2} \ln((t-a)^2 + b^2) + i \operatorname{Arctan}\left(\frac{t-a}{b}\right)$ , avec  $z = a + ib$ .

$$2. x \mapsto \frac{e^{-x}}{4} ((e^{2x} - 1) \cos x + (e^{2x} + 1) \sin x).$$

$$3. x \mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \left( \ln x - \frac{1}{\alpha+1} \right) \text{ si } \alpha \neq -1 \quad \text{et} \quad x \mapsto \frac{(\ln x)^2}{2} \text{ si } \alpha = -1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.$$

$$4. x \mapsto x \operatorname{Arcsin}(x) + \sqrt{1-x^2} \text{ sur } ]-1, 1[.$$

**Exercice 3. 2.**  $I_{p,q} = -\frac{q}{p+1} I_{p,q-1}$ . **3.**  $I_{n,n} = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$ .

**Exercice 4.**  $I + J = \frac{\ln(7 + 4\sqrt{3})}{4}$  et  $I - J = \frac{\pi}{6}$ .

**Exercice 5.** Cas  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  : il y a égalité si et seulement si  $f$  est de signe constant sur  $[a, b]$ .

Cas  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  : il y a égalité si et seulement s'il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $f = e^{i\theta} |f|$ .

**Exercice 7. 1.**  $x \mapsto 2f(2x) - f(x)$ .

**Exercice 8. 1.**  $F'(x) = \int_1^2 \frac{\cos(xu)}{\sqrt{u}} du$ .

**Exercice 15. 1.**  $\frac{\pi}{4}$ . **2.**  $\ln \frac{3}{2}$ . **3.**  $\sqrt{3} - 1$ . **4.**  $\frac{2}{3}$ . **5.**  $\frac{1}{2}$ . **6.**  $\frac{1}{x+1}$ . **7.**  $\frac{\pi}{8}$ . **8.**  $4/e$ . **9.**  $0$ .

**Exercice 16. 1.**  $\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ . **2.**  $\frac{2}{9n^2}$ . **3.**  $\frac{n^2}{\pi}$ .

**Exercice 17.**  $\int_0^1 f(t) dt$ .

**Exercice 18.**  $2e^{\pi/2-2} n^2$ .

**Exercice 19. 3.**  $e^{1/2}$ .

**Exercice 21. 3.**  $I(x) = \begin{cases} 2\pi \ln|x| & \text{si } |x| > 1 \\ 0 & \text{si } |x| < 1 \end{cases}$ .

**Exercice 23. 1.**  $0$ . **2.**  $\ln 3$ . **3.**  $0$ .

**Exercice 24.**  $f(0)$ .

**Exercice 25.**  $\ell$ .

**Exercice 29.**  $\int_0^x e^{t^2} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^{x^2})$ .

**Exercice 31. 1.**  $0$ . **2.**  $\frac{\ln 2}{n}$ .

**Exercice 34.**  $\frac{f(1)}{n} - \frac{f(1) + f'(1)}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .

**Exercice 35. 2.**  $\int_0^1 e^{-xt} f(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{f(0)}{x} + \frac{f'(0)}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)$ .