25 | Intégration

Cahier de calcul : $\varnothing$. **Banque CCINP :** $\varnothing$.

Continuité uniforme

Exercice 1 ●●○○ Soit f une application continue sur $\mathbb{R}_+$ qui admet une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 2 ●●○○ Montrer qu'une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$ est majorée par une fonction affine.

Calculs de primitives et d'intégrales

Exercice 3 ●○○○ Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin(3x)\,\mathrm{d}x$.
2. $\displaystyle\int_3^4 \frac{4}{t(t^2-4)}\,\mathrm{d}t$.
3. $\displaystyle\int_0^1 \max\{\mathrm{e}^t, 2\}\,\mathrm{d}t$.
4. $\displaystyle\int_0^n \mathrm{e}^{\lfloor t\rfloor}\,\mathrm{d}t$, avec $n \in \mathbb{N}$.
5. $\displaystyle\int_{-1}^2 x|x|\,\mathrm{d}x$.
6. $\displaystyle\int_0^1 x(\operatorname{Arctan} x)^2\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4 ●●○○ Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $t \longmapsto \dfrac{1}{t-z}$, avec $z \in \mathbb{C}$.
2. $x \longmapsto \operatorname{ch} x \cos x$.
3. $x \longmapsto x^\alpha \ln x$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
4. Arcsin.

Exercice 5 ●●○○

1. Justifier, pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $q \in [\![0\,,p]\!]$, l'existence de l'intégrale
$$I_{p,q} = \int_0^1 x^p(\ln x)^q\,\mathrm{d}x.$$
2. Exprimer $I_{p,q}$ en fonction de $I_{p,q-1}$, pour tous $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in [\![1\,,p]\!]$.
3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n,n} = \dfrac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$.

Exercice 6 ●●○○ On pose $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^2 t}{\cos(2t)}$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 t}{\cos(2t)}$.

1. Calculer $I+J$ en posant $x = \tan t$.
2. En déduire I et J.

Divers

Exercice 7 ●●○○ Soit $f \in \mathscr{C}([a\,,b],\mathbb{R})$, avec $a < b$. À quelle condition a-t-on
$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t\ ?$$

Exercice 8 ●○○○ Soit $f \in \mathscr{C}([0\,,1],\mathbb{R})$.

1. Montrer que si $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, f s'annule au moins une fois.
2. Montrer que si $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$, f admet un point fixe.

Exercice 9 ●●○○ Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que les fonctions suivantes sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer leur dérivée.

1. $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x f(t+x)\,\mathrm{d}t$.
2. $x \longmapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x-t)\cos t\,\mathrm{d}t$.

Exercice 10 ●●○○ Considérons $F : x \longmapsto \displaystyle\int_1^2 \frac{\sin(xu)}{u^{3/2}}\,\mathrm{d}u$ définie sur $\mathbb{R}_+$.

1. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer sa dérivée.
2. Montrer que F est dérivable en 0.

   On pourra commencer par établir que $1 - \dfrac{y^2}{6} \leqslant \dfrac{\sin y}{y} \leqslant 1$, *pour tout* $y \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 11 ●●○○ **Mines-Ponts MP 2022** Soit $f \in \mathscr{C}([0\,,1],\mathbb{R})$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\displaystyle\int_0^1 f(x)x^k\,\mathrm{d}x = 0$, pour tout $k \in [\![0\,,n]\!]$. Montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois.
2. ~~On suppose que~~ $\cancel{\displaystyle\int_0^1 f(x)x^k\,\mathrm{d}x = 0}$~~, pour tout~~ $\cancel{k \in \mathbb{N}}$~~. Montrer que~~ $\cancel{f = 0}$.

Exercice 12 ●●○○ — Formules de la moyenne

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.

1. **Première formule de la moyenne.** Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a\,,b]$, avec $a<b$, la fonction g étant positive.
   - **a.** Montrer que, si $m = \inf_{[a,b]} f$ et $M = \sup_{[a,b]} f$, alors on a
   $$m\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$
   - **b.** En déduire que si f et g sont continues sur $[a\,,b]$, il existe $c \in [a\,,b]$ tel que
   $$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(c)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$
2. **Seconde formule de la moyenne.** Soit $f : [a\,,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ positive, décroissante, de classe $\mathscr{C}^1$ et $g : [a\,,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. On définit $G : [a\,,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ par
$$\forall x \in [a\,,b], \quad G(x) = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$
On note $m = \min_{[a,b]} G$ et $M = \max_{[a,b]} G$.
   - **a.** Justifier l'existence de m et M.
   - **b.** Via une intégration par parties, montrer que
   $$mf(a) \leqslant \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant Mf(a).$$
   - **c.** En déduire qu'il existe $c \in [a\,,b]$ tel que
   $$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(a)\int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 13 ●●○○

Soient I un intervalle, $a, b \in I$ et $f \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{C})$ une fonction qui ne s'annule pas sur I.

1. Vérifier que $f = f(a)\mathrm{e}^g$ sur I, où $g : x \longmapsto \displaystyle\int_a^x \frac{f'(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t$.
2. Montrer que si $f(a) = f(b)$, le nombre complexe $\displaystyle\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_a^b \frac{f'(t)}{f(t)}\mathrm{d}t$ est un entier relatif.

Exercice 14 ●●○○ — Mines-Ponts MP 2022

Soit $f \in \mathscr{C}([0\,,1], \mathbb{R})$. On définit F sur $]0\,,1]$ par $F(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est prolongeable en une fonction continue sur $[0\,,1]$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 F^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 2\int_0^1 F(t)f(t)\,\mathrm{d}t$.
3. En déduire que $\displaystyle\int_0^1 F^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 4\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t$.

(On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Shwarz (cf. exercice 15))

Exercice 15 ●●○○ — Inégalités de Cauchy-Schwarz, Minkowski et Opial

1. Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a\,,b]$.
   - **a.** Montrer que la fonction $\lambda \longmapsto \displaystyle\int_a^b (\lambda f(t) + g(t))^2\,\mathrm{d}t$ est une fonction polynomiale de signe constant.
   - **b.** En déduire l'*inégalité de Cauchy-Schwarz*
   $$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t\right).$$
   - **c.** Montrer que si f et g sont continues sur $[a\,,b]$, on a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si et seulement si f et g sont colinéaires.
2.
   - **a.** En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, démontrer l'*inégalité de Minkowski*
   $$\left(\int_a^b (f(t)+g(t))^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \leqslant \left(\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} + \left(\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$
   - **b.** Montrer que si f et g sont continues sur $[a\,,b]$, on a égalité dans l'inégalité de Minkowski si et seulement si f et g sont positivement colinéaires.
3. (●●●) Soit $f \in \mathscr{C}([0\,,1], \mathbb{R})$ vérifiant $f(0) = 0$. On note F l'unique primitive de $|f'|$ qui s'annule en 0.
   - **a.** Montrer que $\displaystyle\int_0^a \left|f(t)f'(t)\right|\mathrm{d}t \leqslant \int_0^a F(t)F'(t)\,\mathrm{d}t$.
   - **b.** En déduire l'*inégalité d'Opial* :
   $$\int_0^a \left|f(t)f'(t)\right|\mathrm{d}t \leqslant \frac{a}{2}\int_0^a f'(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 16 ●●○○ Soit $P = a_n X^n + \ldots + a_0 \in \mathbb{C}[X]$.

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} P\big(\mathrm{e}^{it}\big)\,\mathrm{e}^{-ikt}\,\mathrm{d}t$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. Justifier l'existence de $\sup\limits_{\mathbb{U}}|P|$, puis montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|a_k| \leqslant \sup\limits_{\mathbb{U}}|P|$.

Sommes de Riemann

Exercice 17 ●●○○ Déterminer les limites des suites suivantes :

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$.
2. $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{n+k}$.
3. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$.
4. $u_n = \displaystyle\frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \big\lfloor \sqrt{k} \big\rfloor$.
5. $\displaystyle\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \cos^2 \frac{k\pi}{n}$.
6. $u_n = \displaystyle\frac{1}{n^{x+1}} \sum_{k=1}^{n} k^x$, avec $x \in \mathbb{R}_+^*$.
7. $u_n = \displaystyle\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k(n-k)}$.
8. $u_n = \displaystyle\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{1/n}$.
9. (●●●) $u_n = \displaystyle\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k\,\mathrm{e}^{k/2n}$.

Exercice 18 ●●○○ À l'aide de somme de Riemann, calculer des équivalents des suites suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^\alpha$ avec $\alpha > 0$.
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+2k)^3}$.
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cos\left(\frac{\pi k^2}{2n^2}\right)$.

Exercice 19 ●●○○ Mines-Ponts MP 2022 Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n} + \frac{k}{n^2}\right).$$

Étudier la limite éventuelle de $(u_n)_{n \geqslant 1}$.

Exercice 20 ●●○○ Mines-Ponts MP 2022

Donner un équivalent de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \big(k^2+n^2\big)^{1/n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 21 ●●●○

1. Montrer que, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\right[$, $|\ln(1+x) - x| \leqslant 2x^2$.
2. Soit $f : [0\,,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que
$$\lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \exp\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right).$$
3. Que vaut $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$?

Exercice 22 ●●○○ Montrer que si f est une fonction continue et monotone sur $[a\,,b]$, avec $a < b$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{G_n + D_n}{2}\right| \leqslant (b-a)\frac{|f(b)-f(a)|}{2n},$$

où $G_n = \displaystyle\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ et $D_n = \displaystyle\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$.

Exercice 23 ●●○○ Mines-Ponts MP 2022 (intégrale de Poisson)

1. Montrer que $I(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln\big(x^2 - 2x\cos t + 1\big)\,\mathrm{d}t$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$.
2. Décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^{2n} - 1$, où $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En utilisant une somme de Riemann, calculer $I(x)$.

Exercice 24 ●●○○ Inégalité de Jensen Montrer que si f est une fonction convexe et continue sur $\mathbb{R}$ et si φ est continue sur $[a\,,b]$, avec $a < b$, alors

$$f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t.$$

Limites et calculs aymptotiques

Exercice 25 ●●○○ Étudier les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{t^n}{\mathrm{e}^t+1}\,\mathrm{d}t$. **2.** $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\int_x^{3x}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$. **3.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{x^2}\int_x^{x+1/x}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.

Exercice 26 ●●○○ Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Calculer

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to0}\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t$$

et interpréter géométriquement.

Exercice 27 ●●○○ Mines-Ponts MP 2021
Soit $f\in\mathscr{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{+\infty} f=\ell\in\mathbb{R}$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 28 ●●○○ Soit $f:[a\,,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue et positive sur $[a\,,b]$. On souhaite démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b (f(t))^n\,\mathrm{d}t\right)^{1/n}=M, \qquad \text{où } M=\sup_{[a,b]} f.$$

1. Examiner le cas $M=0$.

Dans la suite, on suppose $M>0$ et on fixe $\varepsilon\in\,]0\,,M[$.

2. Justifier l'existence d'un intervalle $[\alpha\,,\beta]$, avec $\alpha<\beta$, tel que $f(t)\geqslant M-\varepsilon$, pour tout $t\in[\alpha\,,\beta]$.

3. Montrer que

$$(\beta-\alpha)^{1/n}(M-\varepsilon)\leqslant\left(\int_a^b (f(t))^n\,\mathrm{d}t\right)^{1/n}\leqslant(b-a)^{1/n}M.$$

et conclure.

Exercice 29 ●●○○ Soit f une fonction continue et strictement croissante sur $[0\,,1]$ et telle que $f(0)=0$ et $f(1)=1$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(t)^n\,\mathrm{d}t=0$.

Exercice 30 ●●●○ Soit $f\in\mathscr{C}([0\,,1],\mathbb{R})$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t=f(0).$$

Exercice 31 ●●○○ Mines-Ponts MP 2021
Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $f:[-1\,,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ telle que $f(0)=0$.

1. Montrer que, pour tout $x\neq0$, $\displaystyle\frac{f(x)}{x}=\int_0^1 f'(xt)\,\mathrm{d}t$.

2. Montrer que, pour tout $k\in[\![0\,,n]\!]$, $\displaystyle\lim_{x\to0} g^{(k)}(x)=\frac{f^{(k+1)}(0)}{k+1}$, où $g:x\longmapsto\dfrac{f(x)}{x}$.

Exercice 32 ●○○○ Comparer au voisinage de $+\infty$ les fonctions

$$x\longmapsto \mathrm{e}^{x^2} \qquad \text{et} \qquad x\longmapsto\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 33 ●●●○ Mines-Ponts MP 2021 Soit $a>0$, $g\in\mathscr{C}([0\,,a],\mathbb{R})$ telle que $g(0)\neq0$ et $F:x\longmapsto\displaystyle\int_0^a g(t)\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $F(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{g(0)}{x}$.

Exercice 34 ●●○○ On considère la suite $(I_n)_{n\geqslant0}$ définie par

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad I_n=\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $(I_n)_{n\geqslant0}$ converge et déterminer sa limite.

2. En déduire un équivalent de la suite $(J_n)_{n\geqslant0}$ définie par

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad J_n=\int_0^1 t^n\ln\big(1+t^2\big)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 35 ●●○○ On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $F(n)=\displaystyle\int_0^\pi\frac{|\sin(nt)|}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier proprement la définition de F.

2. **a.** Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, montrer l'inégalité $\displaystyle\frac{2}{(k+1)\pi}\leqslant\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{2}{k\pi}$.

b. En déduire l'équivalent $F(n)\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{2}{\pi}\ln n$.

Exercice 36 ●●○○ On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}$.

1. Calculer u_0, u_1 et u_2.
2. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \dfrac{\ln 2}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Exercice 37 ●●○○ Soit $f \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})$. Déterminer un développement asymptotique de $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$ à la précision $o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 38 ●●○○

1. Montrer que, pour tout $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$,
$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x}\right).$$
2. Soit $f \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})$. Déterminer un développement asymptotique au voisinage de $+\infty$ de $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t$ à la précision $O\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$.

Formules de Taylor

Exercice 39 ●○○○ Soit $f \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ et $a \in I$.
Montrer que la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive n^{e} de f sur I.

Exercice 40 ●○○○ Montrer que, pour tout $x \in [0,\pi]$,
$$x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

Exercice 41 ●●○○ Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\sin x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{et} \quad \cos x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Exercice 42 ●●●○ **Formule du binôme négatif**
Montrer que, pour tous $r \in \mathbb{N}$ et $x \in \left]-1,1\right[$,
$$\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=0}^{p} \binom{k+r}{r} x^k = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}.$$

Exercice 43 ●●○○ **Inégalité de Kolmogorov**
Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose f et f'' bornées sur $\mathbb{R}$ et on considère M et M'' des majorants respectifs de $|f|$ et $|f''|$ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que, pour tous $x, h \in \mathbb{R}$,
$$\left|f(x+h) - f(x) - hf'(x)\right| \leqslant \frac{h^2}{2}M'' \quad \text{et} \quad \left|f(x-h) - f(x) + hf'(x)\right| \leqslant \frac{h^2}{2}M''.$$
2. En déduire que, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$,
$$\left|f'(x)\right| \leqslant \frac{M}{h} + \frac{h}{2}M''$$
puis que f' est bornée sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'*inégalité de Kolmogorov* $|f'(x)| \leqslant \sqrt{2MM''}$.
Remarque : cette inégalité se généralise pour une fonction de classe $\mathscr{C}^k$.

Exercice 44 ●●○○ Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^1 \sin(xt^2)\,\mathrm{d}t$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. **a.** Montrer que, pour tous $t \in [0,1]$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$$\left|\sin(yt^2) - \sin(xt^2)\right| \leqslant |y-x|.$$
   b. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que, pour tous $t \in [0,1]$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$$\left|\sin(yt^2) - \sin(xt^2) - (y-x)t^2\cos(xt^2)\right| \leqslant \frac{1}{2}|y-x|^2.$$
4. En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = \int_0^1 t^2 \cos(xt^2)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 45 ●●●○ Soit $\lambda > 0$ et $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\left|f^{(n)}(t)\right| \leqslant \lambda^n n!$.

1. Montrer que f est nulle sur $\left[-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right]$.
2. Montrer que f est même nulle sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Indications

Exercice 9. 2. Procéder à un changement de variable.

Exercice 14. 2. Procéder à une IPP après avoir déterminé qui est F'.

Exercice 17. 7. Pour calculer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,\mathrm{d}x$ on pourra procéder au changement de variable $x = \sin^2 t$.

Exercice 30. On pourra majorer la différence $\displaystyle\left|\int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t - f(0)\right|$, via un découpage du segment $[0\,,1]$ en $[0\,,1-\varepsilon]$ et $[1-\varepsilon\,,1]$.

Éléments de réponses

Exercice 3. 1. $\dfrac{7}{15}$. **2.** $\dfrac{3}{2}\ln 3 - \dfrac{1}{2}\ln 5 - \ln 2$. **3.** $2\ln 2 + \mathrm{e} - 2$. **4.** $\dfrac{\mathrm{e}^n - 1}{\mathrm{e} - 1}$. **5.** $\dfrac{7}{3}$. **6.** $\dfrac{\pi^2}{16} - \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\ln 2}{2}$.

Exercice 4. 1. $t \longmapsto \dfrac{1}{2}\ln\big((t-a)^2 + b^2\big) + i\,\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{t-a}{b}\right)$, avec $z = a + ib$.

2. $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{4}\big((\mathrm{e}^{2x} - 1)\cos x + (\mathrm{e}^{2x} + 1)\sin x\big)$.

3. $x \longmapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\left(\ln x - \dfrac{1}{\alpha+1}\right)$ si $\alpha \neq -1$ et $x \longmapsto \dfrac{(\ln x)^2}{2}$ si $\alpha = -1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. $x \longmapsto x\,\mathrm{Arcsin}(x) + \sqrt{1-x^2}$ sur $]-1\,,1[$.

Exercice 6. $I + J = \dfrac{\ln\big(7 + 4\sqrt{3}\big)}{4}$ et $I - J = \dfrac{\pi}{6}$.

Exercice 7. Il y a égalité si et seulement si f est de signe contant sur $[a\,,b]$.

Exercice 9. 1. $x \longmapsto 2f(2x) - f(x)$.

Exercice 10. 1. $F'(x) = \displaystyle\int_1^2 \frac{\cos(xu)}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$.

Exercice 17. 1. $\dfrac{\pi}{4}$. **2.** $\ln\dfrac{3}{2}$. **3.** $\sqrt{3} - 1$. **4.** $\dfrac{2}{3}$. **5.** $\dfrac{1}{2}$. **6.** $\dfrac{1}{x+1}$. **7.** $\dfrac{\pi}{8}$. **8.** $4/\mathrm{e}$. **9.** 0.

Exercice 18. 1. $\dfrac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$. **2.** $\dfrac{2}{9n^2}$. **3.** $\dfrac{n^2}{\pi}$.

Exercice 19. $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 20. $2\,\mathrm{e}^{\pi/2-2}\,n^2$.

Exercice 21. 3. $\mathrm{e}^{1/2}$.

Exercice 23. 3. $I(x) = \begin{cases} 2\pi\ln|x| & \text{si } |x| > 1 \\ 0 & \text{si } |x| < 1 \end{cases}$.

Exercice 25. 1. 0. **2.** $\ln 3$. **3.** 0.

Exercice 26. $f(0)$.

Exercice 27. ℓ.

Exercice 32. $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} o\Big(\mathrm{e}^{x^2}\Big)$.

Exercice 34. 1. 0. **2.** $\dfrac{\ln 2}{n}$.

Exercice 37. $\dfrac{f(1)}{n} - \dfrac{f(1) + f'(1)}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 38. 2. $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} \frac{f(0)}{x} + \frac{f'(0)}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)$.