

Cahier de calcul : fiche 27.

Banque CCINP : exercice 21.

Petits o, équivalents

— Exercice 1 •○○○ — Élaguer les expressions suivantes :

1. $\dots \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2^n} + o\left(\frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n^2}.$
2. $\dots \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) + 3 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$
3. $\dots \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x) + x \ln x + o(x^2 \ln x) + x^2 + o(x^2).$
4. $\dots \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right) + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n \ln n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right).$
5. $\dots \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n + o(n) + \sqrt{n} + o(\sqrt{n}) + \frac{n^2}{\ln n} + n \ln n + o(n \ln n).$

— Exercice 2 •○○○ — Trouver un équivalent simple des expressions suivantes :

1. $\frac{|x|}{\sqrt{x+1}}$ en $+\infty$.
2. $\frac{x^4 - x^3 + 1}{|x|^2 - 4x}$ en $+\infty$.
3. $\frac{n^2 \ln(1 + \frac{1}{n})}{\tan \frac{\pi}{n}}$ en $+\infty$.
4. $\frac{\ln(n^4 + 4)}{n + 1}$ en $+\infty$.
5. $\frac{\cos x - x^x}{e^x}$ en 0.
6. $\frac{\ln x}{\sqrt{x+2}}$ en 1.
7. $3 + e^{1/n} - \frac{6}{n}$ en $+\infty$.
8. $\ln\left(\frac{1 + \cos x}{2}\right)$ en 0.
9. $\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ en π .
10. $\frac{\ln(x^7 + \sqrt[5]{x})}{x^2 + 9}$ en $+\infty$.
11. $(x+1)^x - x^x$ en 0.
12. $(\cos x)^{\ln x} - 1$ en 0.
13. $\frac{1}{1+x+x^{1+\alpha}}$ en $+\infty$.
14. $e^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$.
15. $\sqrt[n]{n} + n^{\sqrt{n}} + n^{n/2}$.
16. $\ln(\operatorname{ch} x) + \operatorname{sh}^2 x$ en 0.
17. $\operatorname{Arcsin}(e^{-\sqrt{n}})$.
18. $e^{e^{-n}} - e$.
19. $\frac{\cos(2x) - \operatorname{ch}(3x)}{x + \sin^2(4\sqrt{x})}$ en 0.
20. $(2n)! - n^n$.
21. $e^{\operatorname{Arccos}(1/n)} - e^{\pi/2} \cos \frac{1}{\sqrt{n}}$.

— Exercice 3 •○○○ —

1. Comparer au voisinage de $+\infty$ les fonctions suivantes.
a. $x^{\ln x}$ et $(\ln x)^x$. b. $(x^x)^x$ et x^{x^x} .
2. Comparer au voisinage de 0 les fonctions suivantes.
a. $(e^x - 1)^3$ et $x \sin x$. b. e^{-1/x^2} et x^3 . c. $\ln x \ln(1+x)$ et $\ln(x^2) \sin^2 x$.
3. Comparer les suites de terme général $\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ et $\frac{1}{n^\gamma}$, avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^*$.

— Exercice 4 •●○○ —

1. Montrer que
a. $\sum_{k=1}^n e^{k^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{n^2}$. b. $\sum_{k=1}^n k! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n!$.
2. Déterminer un équivalent de $((n+1) \cdots (2n))^{1/n}$.

— Exercice 5 •●○○ — Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ deux suites réelles.

1. Trouver un exemple de suites $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ pour lesquelles :
a. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$, mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) \neq 0$.
b. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$, mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} \neq 1$.
2. a. Montrer l'équivalence :
$$e^{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{v_n} \iff u_n - v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1).$$

b. Trouver un exemple de suites $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ pour lesquelles $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, mais pour lesquelles il est faux que $e^{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{v_n}$.
3. a. Montrer que si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors $\ln u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln v_n$.
b. Trouver un exemple de suites $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ pour lesquelles $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$, mais pour lesquelles il est faux que $\ln u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln v_n$.

— Exercice 6 •●○○ —

1. Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. À quelle condition a-t-on $e^f \underset{a}{\sim} e^g$?
2. a. Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et à valeurs strictement positives. On suppose que $f \underset{a}{\sim} g$ et que $\lim_a g = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{1\}$.
Montrer que $\ln f \underset{a}{\sim} \ln g$.
b. En déduire un équivalent en $+\infty$ de $f(x) = \ln(x^2 + 2^x)$.

Exercice 7 ●●○○

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto x + \ln x$ est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer $\lim_{y \rightarrow +\infty} f^{-1}(y)$.
3. En déduire que $f^{-1}(y) \underset{y \rightarrow +\infty}{\sim} y$.
4. Montrer que $f^{-1}(y) - y \underset{y \rightarrow +\infty}{\sim} -\ln y$.

Applications aux suites et aux fonctions

Exercice 8 ●○○○

Déterminer les limites suivantes.

1. $\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1}$ en 0.
2. $\frac{2-\sqrt{x^2+4}}{x\sqrt{1+x}-x}$ en 0.
3. $\frac{x^x-1}{x}$ en 0^+ .
4. $x(\ln(1+x)-\ln x)$ en $+\infty$.
5. $\frac{\ln(1+x+x^2)}{x^2}$ en 0^+ .
6. $\left(\frac{x+2}{x}\right)^{2x}$ en $+\infty$.
7. $\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x$ en $+\infty$.
8. $\frac{x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^4+x}}$ en 0.
9. $x \sin \frac{\pi}{x}$ en $+\infty$.
10. $\frac{x}{\sqrt{x+1}} - \frac{x}{\sqrt{x+2}}$ en $+\infty$.
11. $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{e^{-\frac{\pi}{2}x^2}-e^{-\frac{\pi}{2}}}$ en 1.
12. $\frac{\sin(3x)}{1-2\cos x}$ en $\frac{\pi}{3}$.
13. $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$ en $+\infty$.

Exercice 9 ●○○○

Donner un équivalent simple et la limite éventuelle de chacune des suites suivantes données par leur terme général.

1. $n^2 - 2n$.
2. $\sqrt{n} + (\ln n)^{12} + \sin n$.
3. $2^n + n^2$.
4. $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$.
5. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
6. $\sin\left(\frac{n+1}{n^2}\right)$.
7. $\ln(1+n) - \ln n$.
8. $\ln(1+n) + \ln n$.
9. $\frac{\sin \frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}} - 1}$.
10. $\frac{(1 - \cos \frac{1}{n}) \cos \frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n^2}} - 1}$.
11. $\ln\left(\frac{n^2+1}{n(n+1)}\right)$.
12. $\frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}$.
13. $n^2 - n \cos n + 2$.
14. $\frac{2^n + n}{2^n}$.
15. $\frac{n + (-1)^n}{n - \ln(n^3)}$.
16. $\frac{\alpha^n}{n}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
17. $\left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$, avec $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.
18. $\binom{n+r}{r}$, avec $r \in \mathbb{N}$.

Exercice 10 ●●○○

Calcul approché des racines carrées

Soit $a > 1$. On considère les suites $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ définies par

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}.$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ sont correctement définies.
2. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire une expression du terme général de $(v_n)_{n \geq 0}$ puis de $(u_n)_{n \geq 0}$.
4. Établir l'équivalent $u_n - \sqrt{a} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{a} \left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} \right)^{2^n}$.

Cette méthode de calcul des valeurs approchées d'une racine carrée s'appelle la *méthode de Héron* ou *méthode des Babyloniens*. Pourquoi est-elle redoutable ?**Exercice 11** ●●●○Soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, et $0 < a_1 < \dots < a_p$ des réels.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $a_p < n$. Montrer que l'équation $\sum_{k=1}^p a_k^x = n^x$ admet une unique solution x_n dans $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la suite (x_n) décroît et converge vers 0.
3. En déduire que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln p}{\ln n}$.

Exercice 12 ●●○○

Mines-Ponts MP 2022

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe un unique $a_n \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\int_0^{a_n} \sqrt[p]{f(t)+1} dt = \frac{1}{n^p}.$$

2. Donner un équivalent de a_n .

Développements limités

Exercice 13 ●●○○

Calculer les développements limités suivants au voisinage de 0 :

1. $\sin^2 x \cos x$ à l'ordre 5.
2. $\sin^4 x$ à l'ordre 7.
3. $\frac{x e^{-x}}{2x+1}$ à l'ordre 4.
4. $\frac{\ln(1+x^2)}{x}$ à l'ordre 5.
5. 2^x à l'ordre 2.
6. $\ln(1-x+x^2)$ à l'ordre 3.
7. $\sqrt{1+\sin x}$ à l'ordre 3.
8. $\ln(e^x + \cos x)$ à l'ordre 2.
9. $\ln(1+x+\sqrt{1+x})$ à l'ordre 3.
10. $\frac{\sqrt[3]{\cos x}}{1+x^2}$ à l'ordre 5.
11. $\frac{\ln(1+3x)}{\operatorname{ch} x}$ à l'ordre 3.
12. $\ln(\operatorname{ch}(2x))$ à l'ordre 3.
13. $\sqrt{\operatorname{ch}(\sin x)}$ à l'ordre 3.
14. $\frac{\operatorname{Arctan} x}{\operatorname{Arcsin} x}$ à l'ordre 4.
15. $\ln(1+\sin x) - \sin(\ln(1+x))$ à l'ordre 5.

Exercice 14 ●○○○

Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $e^x - \frac{1+ax}{1+bx} \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2)$.

Exercice 15 ●●○○

Calculer les développements limités suivants à l'ordre 2

1. $\sqrt{x}$ en 5.
2. $\frac{\ln x}{x}$ en 3.
3. $x e^x$ en 1.

Exercice 16 ●●○○

Soit f la fonction définie par $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$. Donner un développement limité de f en 0 à l'ordre 4.

Exercice 17 ●●○○ DL de la tangente en 0

1. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = \frac{\tan^{(n)}(x)}{n!}$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (n+1)a_{n+1} = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}.$$

2. En déduire que $\tan x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$.

Exercice 18 ●●○○

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{4^k} \binom{2k}{k} x^k + o(x^n).$$

2. En déduire le développement limité de la fonction Arcsin au voisinage de 0 à tout ordre.

Exercice 19 ●●○○ DL d'une réciproque

1. On note f la fonction $x \mapsto x + \ln(1+x)$.
 - a. Montrer que f est bijective de $] -1, +\infty[$ sur son image, que l'on précisera.
 - b. Montrer que f^{-1} possède un développement limité à l'ordre 3 en 0 et le calculer.
2. On note g la fonction $x \mapsto x e^{x^2}$.
 - a. Montrer que g est bijective de $\mathbb{R}$ sur son image, que l'on précisera.
 - b. Montrer que g^{-1} possède un développement limité à l'ordre 5 en 0 et le calculer.

Exercice 20 ●●○○ Mines-Ponts MP 2022

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : x \mapsto \ln(1 + \sqrt{1+x^n})$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0 et calculer ses dérivées successives en 0.

Applications à la recherche d'équivalents

Exercice 21 ●○○○ Banque d'exercices CCINP 2024 (1)

1. On considère deux suites numériques $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ telles que $(v_n)_{n \geq 0}$ est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$.
Démontrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.
2. Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de $u_n = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 22 ●●○○

Déterminer des équivalents simples en 0 des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto e^x - e^{-x}$.
2. $x \mapsto e^{x^2} - \cos x$.
3. $x \mapsto x + \operatorname{Arctan} x - 2 \sin x$.
4. $x \mapsto \frac{1}{x} \left(\sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt[3]{1-x^2} \right)$.
5. $x \mapsto \frac{1}{x \ln(1+x)} - \frac{1}{\sin(x^2)}$.
6. $x \mapsto x^x - (\sin x)^x$.

Exercice 23 ●●○○

Déterminer des équivalents simples des suites de terme général :

1. $e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
2. $\sqrt{n(1+4n)} - 2n - \frac{1}{4}$.
3. $-2 + (2n+1) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.
4. $\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.
5. $\frac{1}{n} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n \ln n}$.

Exercice 24 ●●○○

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle. Montrer que si $u_n = o(\sqrt{n})$, alors $\left(1 + \frac{u_n}{n}\right)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{u_n}$.

Étude locale d'une fonction

Exercice 25 ●●○○

Étudier les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{\tan x - x}$.
2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2x^2 - 1)}{x\sqrt{x} - 1}$.
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right)$.
4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3}\right)^n$.
5. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$.
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin^3 x}\right)$.

Exercice 26 ●●○○

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Déterminer la limite en $+\infty$ de

$$(t+a)^{1+1/t} - t^{1+1/(t+a)}.$$

Exercice 27 ●○○○

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 0. Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(5x) - 3f(4x) + 7f(x) - 5f(0)}{x^2}.$$

Exercice 28 ●●○○

On note f la fonction définie par $f(0) = 0$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x^{1+1/x}$.

1. Étudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que f possède un développement limité à l'ordre 3 en 1 et le calculer. Qu'en déduit-on sur le graphe de f ?

Exercice 29 ●●○○

À l'aide de développements limités, montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{e^{-x}}{\sin(2x)} - \frac{\cos x}{2x}$ définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$ est prolongeable par continuité en 0 et que son prolongement est dérivable en 0.

Exercice 30 ●●○○

Étudier localement voisinage de 0 les fonctions données par les expressions suivantes.

1. $\frac{\ln(1+x)}{e^x - 1}$.
2. $(\operatorname{ch} x)^{1/x}$.
3. $\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}$.
4. $\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$.
5. $\frac{x - \ln(1+x)}{e^x + 1}$.

Développements asymptotiques et étude d'asymptotes

Exercice 31 ●●○○

Calculer un développement asymptotique

1. de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ à la précision $o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ au voisinage de $+\infty$;
2. de $\operatorname{Arctan} x$ à la précision $o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$;
3. (●●●) de $\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n k!$ à la précision $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 32 ●●○○

Montrer que les fonctions suivantes possèdent une asymptote en $+\infty$, dont on donnera l'équation, et étudier la position relative de leur graphe par rapport à celle-ci au voisinage de $+\infty$:

1. $f : x \mapsto x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.
2. $g : x \mapsto (x+1)e^{1/x}$.
3. $h : x \mapsto \ln(e^{2x} - e^x + 1)$.

Divers

— **Exercice 33** ●○○○ — Montrer que les familles suivantes sont libres dans $\mathbb{R}$ grâce à des développements limités.

1. $(x \mapsto e^x, x \mapsto x e^x, x \mapsto e^{x^3})$.
2. $(x \mapsto e^x, x \mapsto e^{2x}, x \mapsto e^{x^2})$.
3. $(x \mapsto \sin x, x \mapsto x \sin x, x \mapsto \cos x, x \mapsto x \cos x)$.

— **Exercice 34** ●●○○ — **Mines-Ponts MP 2022** Résoudre sur $I =]-1, +\infty[$ l'équation différentielle $xy' + y = \frac{1}{1+x}$. ~~Admet-elle une solution $\mathcal{C}^\infty$ sur I ?~~

— **Exercice 35** ●●○○ — Soit (E) l'équation différentielle

$$2xy'' - y' + x^2y = 0.$$

1. a. Montrer que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.
b. Trouver une solution sur $\mathbb{R}_+^*$ possédant un développement limité en 0 à tout ordre ainsi que ses dérivées.
2. En effectuant le changement de variable $t = \frac{\sqrt{2}}{3}(\pm x)^{3/2}$, résoudre l'équation (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
3. Quelles sont les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$?

— **Exercice 36** ●●○○ — **Développement asymptotique d'une suite récurrente**

On note $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + n^2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
2. a. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n - 1 \leq u_n \leq n$.
b. En déduire un équivalent de u_n .
3. Montrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n - \frac{1}{2} + o(1)$ puis que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n - \frac{1}{2} - \frac{3}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

— **Exercice 37** ●●○○ — Soit f une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ continue telle que

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - ax^\alpha + o(x^\alpha)$$

au voisinage de 0 avec $a > 0$ et $\alpha > 1$. On définit une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Montrer que, pour u_0 assez petit, la suite est décroissante et converge vers 0.
2. Soit $\beta > 0$, on pose

$$x_n = \frac{1}{u_{n+1}^\beta} - \frac{1}{u_n^\beta}.$$

Trouver un équivalent de $(x_n)_{n \geq 0}$.

3. En choisissant judicieusement β , trouver un équivalent de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.
(On pourra utiliser le théorème de Césàro.)
4. Application : prendre $f(x) = \sin x$.

— **Exercice 38** ●●○○ — **Solutions implicites d'une équation**

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\tan x = x$ admet une et une seule solution, notée x_n , dans l'intervalle $\left]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$.
2. Montrer que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n\pi$, puis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} = 0$.
3. En déduire que $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{n\pi}$.
4. Chercher un équivalent de $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n\pi}$.
5. Conclure que

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

— **Exercice 39** ●●○○ — **Mines-Ponts MP 2022**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto nx^{n+1} - (n+1)x^n$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ possède une unique solution x_n dans $\mathbb{R}_+$.
2. Calculer $f_n\left(1 + \frac{2}{n}\right)$. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est convergente et trouver sa limite.
3. On pose $u_n = n(x_n - 1)$ et $h : x \mapsto e^x(x - 1)$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} h(u_n) = 1$.
4. Montrer que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, où α désigne la solution de l'équation $h(x) = 1$.

— **Exercice 40** ●●○○ — **Solutions implicites d'une équation**

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x - \ln x = n$ admet une unique solution dans $[1, +\infty[$ que l'on note u_n .
 - Montrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n + \ln n + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$.
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x - \ln x = n$ admet une unique solution dans $]0, 1]$ que l'on note u_n .
 - Montrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} e^{-n} + e^{-2n} + o(e^{-2n})$.

— **Exercice 41** ●●○○ — **Solutions implicites d'une équation** Soit $\alpha > e$.

- Montrer que l'équation $e^x = \alpha x$, d'inconnue x dans $\mathbb{R}_+$, possède exactement deux solutions x_α et y_α avec $x_\alpha < y_\alpha$.
- Montrer que $y_\alpha \underset{\alpha \rightarrow +\infty}{\sim} \ln \alpha$.
 - Déterminer un équivalent simple de $y_\alpha - \ln \alpha$ lorsque α tend vers $+\infty$.
- Étudier la monotonie de la fonction $\alpha \mapsto x_\alpha$ sur $]e, +\infty[$ et en déduire $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} x_\alpha$.
 - Déterminer un développement asymptotique de x_α à la précision $o\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)$ lorsque α tend vers $+\infty$.

— **Exercice 42** ●●○○ — **Solutions implicites d'une équation**

Soit $n \geq 1$ et f_n la fonction définie par

$$f_n(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \cdots + \frac{1}{x-n}.$$

- Pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que l'équation $f_n(x) = \lambda$ admet une unique solution dans $]n, +\infty[$ que l'on notera x_n .
- Étudier la suite $f_n(\alpha n)$ pour $\alpha > 1$.
- En déduire que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \frac{e^\lambda}{e^\lambda - 1}$.

— **Exercice 43** ●●○○ — **X MP 2022**

Soit $n \geq 2$. On note $P(k, n) = \prod_{i=0}^k \left(1 - \frac{i}{n}\right)$, pour $0 \leq k < n$.

- Montrer qu'il existe un plus petit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $P(k, n) \leq \frac{1}{2}$. On le note k_n .
- Montrer que la suite $(k_n)_{n \geq 2}$ tend vers l'infini.
- Montrer que $k_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n)$.

— **Exercice 44** ●●●● — **ENS Lyon MP 2022**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $c_n = |\mathbb{P} \cap \llbracket 0, n \rrbracket|$, où $\mathbb{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers.

On note $r_n = \prod_{p \in \mathbb{P}, p|n!} p$.

- Montrer que $r_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(4^n)$.
- Montrer que $c_n^{c_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(r_n)$.
- En déduire que $c_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{n}{\ln n}\right)$.

— **Exercice 45** ●●●● — **X MP 2022** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $i(n)$ (resp. $p(n)$) le nombre de diviseurs positifs impairs (resp. pairs) de n . Déterminer la limite, un équivalent, puis un développement asymptotique de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ de terme général

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (i(k) - p(k)).$$

Indications

Exercice 31. 2. Exprimer $\text{Arctan}(x)$ en fonction de $\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 39. 3. Remarquer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est bornée. 4. h induit une bijection sur un intervalle bien choisi.

Exercice 43. 2. Commencer par montrer que $(k_n)_{n \geq 2}$ est monotone.

3. On peut établir que $k_n \leq 2\lfloor \sqrt{n} \rfloor$, à partir d'un certain rang.

Éléments de réponses

Exercice 1. 1. $\frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. 2. $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. 3. $\frac{1}{x} = x \ln x + x + o(x)$.

4. $\frac{\ln n}{n} = \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$. 5. $\frac{n^2}{\ln n} = \frac{n^2}{\ln n} + n \ln n + o(n \ln n)$.

Exercice 2. 1. $\sqrt{x}$. 2. x^2 . 3. $\frac{n^2}{\pi}$. 4. $\frac{4 \ln n}{n}$. 5. $-x \ln x$. 6. $\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$. 7. 4. 8. $-\frac{x^2}{4}$.

9. $\frac{\pi-x}{\sqrt{\pi}}$. 10. $\frac{7 \ln x}{x^2}$. 11. $-x \ln x$. 12. $-\frac{x^2 \ln x}{2}$. 13. $\begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } \alpha < 0, \\ \frac{1}{2x} & \text{si } \alpha = 0, \\ \frac{1}{x^{\alpha+1}} & \text{si } \alpha > 0. \end{cases}$ 14. 1.

15. $2n^{n/2}$. 16. $\frac{3x^2}{2}$. 17. $e^{-\sqrt{n}}$. 18. e^{1-n} . 19. $-\frac{13x}{34}$. 20. $(2n)!$. 21. $-\frac{e^{\pi/2}}{2n}$.

Exercice 3. 1.a. $x^{\ln x} = o((\ln x)^x)$. 1.b. $(x^x)^x = o(x^{x^x})$.

2.a. $(e^x - 1)^3 = o(x \sin x)$. 2.b. $e^{-1/x^2} = o(x^3)$.

2.c. $\ln(x^2) \sin^2 x = o(\ln x \ln(1+x))$.

Exercice 4. 2. $((n+1) \cdots (2n))^{1/n} \sim \frac{4n}{e}$.

Exercice 8. 1. 2. $-\frac{1}{2}$. 3. $-\infty$. 4. 1. 5. $+\infty$. 6. e^4 . 7. e^2 . 8. 1. 9. π . 10. 0.

11. $\frac{e^{\pi/2}}{2}$. 12. $-\sqrt{3}$. 13. $\frac{1}{2}$.

Exercice 9. 1. $u_n \sim n^2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. 2. $u_n \sim \sqrt{n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

3. $u_n \sim 2^n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. 4. $u_n \sim 2\sqrt{n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

5. $u_n \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. 6. $u_n \sim \frac{1}{n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

7. $u_n \sim \frac{1}{n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. 8. $u_n \sim 2 \ln n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

9. $u_n \sim 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$. 10. $u_n \sim \frac{1}{2}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

11. $u_n \sim -\frac{1}{n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. 12. $u_n \sim -1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$.

13. $u_n \sim n^2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. 14. $u_n \sim 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

15. $u_n \sim 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$. 18. $\sqrt{ab}$.

Exercice 13. 1. $x^2 - \frac{5}{6}x^4 + o(x^5)$. 2. $x^4 - \frac{2}{3}x^6 + o(x^7)$.

3. $x - 3x^2 + \frac{13}{2}x^3 - \frac{79}{6}x^4 + o(x^4)$. 4. $x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{3} + o(x^5)$.

5. $1 + \ln 2 \times x + \frac{\ln^2 2}{2}x^2 + o(x^2)$. 6. $-x + \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$.

7. $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + o(x^3)$. 8. $\ln 2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$.

9. $\ln 2 + \frac{3}{4}x - \frac{11}{32}x^2 + \frac{7}{32}x^3 + o(x^3)$. 10. $1 - \frac{7}{6}x^2 + \frac{83}{72}x^4 + o(x^5)$.

11. $3x - \frac{9}{2}x^2 + \frac{15}{2}x^3 + o(x^3)$. 12. $2x^2 + o(x^3)$. 13. $1 + \frac{1}{4}x^2 + o(x^3)$.

14. $1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)$. 15. $-\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{8}x^5 + o(x^5)$.

Exercice 14. $(a, b) = (1/2, -1/2)$.

Exercice 15. 1. $\sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{10}(x-5) - \frac{\sqrt{5}}{200}(x-5)^2 + o((x-5)^2)$.

2. $\frac{\ln 3}{3} + \frac{1}{9}(1 - \ln 3)(x-3) + \frac{1}{9}\left(\frac{\ln 3}{3} - \frac{1}{2}\right)(x-3)^2 + o((x-3)^2)$.

3. $e + 2e(x-1) + \frac{3e}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$.

Exercice 18. 2. $\text{Arcsin}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)4^k} \binom{2k}{k} x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$.

Exercice 19. 1. $\frac{x}{2} + \frac{x^2}{16} - \frac{x^3}{192} + o(x^3)$. 2. $x - x^3 + \frac{5}{2}x^5 + o(x^5)$.

Exercice 22. 1. $2x$. 2. $\frac{3}{2}x^2$. 3. $\frac{11}{60}x^5$. 4. $\frac{2}{3}x$. 5. $-\frac{1}{12}$. 6. $\frac{x^3}{6}$.

Exercice 23. 1. $\frac{e}{2n}$. 2. $-\frac{1}{64n}$. 3. $\frac{1}{6n^2}$. 4. $\frac{(-1)^n \pi}{2n}$. 5. $-\frac{\ln n}{2n^2}$.

Exercice 25. 1. Pas de limite $\left(\sim -\frac{3}{2x}\right)$. 2. $\frac{8}{3}$. 3. $-\frac{1}{3}$. 4. $\frac{8}{9}$. 5. $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

6. Pas de limite $\left(\sim -\frac{1}{2x}\right)$.

Exercice 26. a.

Exercice 27. $-8f''(0)$.

Exercice 28. 2. $f(x) = 1 + 2(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$.

Exercice 29. $f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{5}{6}x + o(x)$.

Exercice 31. 1. $e - \frac{e}{2n} + \frac{11e}{24n^2} - \frac{7e}{16n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$. 2. $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. 3. $1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 32. 1. $\frac{1}{x} = x - 1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. 2. $\frac{1}{x} = x + 2 + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.

3. $\frac{1}{x} = 2x - e^{-x} + o(e^{-x})$.

Exercice 34. L'unique solution sur I est donnée par $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ prolongée par 1 en 0 et elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I .

Exercice 35. 1.b. $x \mapsto \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\right)$. **2.** $x \mapsto \lambda \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\right)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $x \mapsto \lambda \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}(-x)^{3/2}\right) + \mu \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}(-x)^{3/2}\right)$ sur $\mathbb{R}_-^*$.

$$\mathbf{3.} \quad x \mapsto \begin{cases} \lambda \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\right) & \text{si } x > 0 \\ \lambda \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}(-x)^{3/2}\right) & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercice 37. 2. $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} a\beta u_n^{\alpha-\beta-1}$.

$$\mathbf{3.} \quad \text{Pour } \beta = \alpha - 1, \text{ on obtient } u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{1}{na(\alpha-1)}\right)^{1/(\alpha-1)}. \quad \mathbf{3.} \quad u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}.$$

Exercice 39. 1. Appliquer le théorème de la bijection à f_n . **2.** $f_n\left(1 + \frac{2}{n}\right) = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n > 1$ et $f_n(1) = -1$, ainsi $x_n \in \left[1, 1 + \frac{2}{n}\right]$. En particulier $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$.

3. Via la définition de x_n , il vient $u_n - 1 = x_n^{-n}$.