23 Espaces vectoriels de dimension finie

Cahier de calcul : $\varnothing$. **Banque CCINP :** exercices 12, 23, 24 et 27.

Exercice 1 ●○○○ **Vrai ou faux ?** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

1. Une famille de $n+1$ vecteurs de E est génératrice.
2. Une famille de $n-1$ vecteurs de E est libre.
3. L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de dimension finie.
4. La somme de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de dimension finie.
5. L'union de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de dimension finie.

Bases et dimension

Exercice 2 ●○○○

1. Montrer que la famille $((8,4,1,2),(1,3,0,5))$ est libre et la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Montrer que la famille $\left(X^3+X+1, X^3-2X+2, X^2+3X\right)$ est libre et la compléter en une base de $\mathbb{R}_4[X]$.
3. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et (e_1,e_2,e_3) une base de E. On pose $\varepsilon_1 = e_1+2e_2+e_3$ et $\varepsilon_2 = e_2 - e_3$. Montrer que $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ est libre et la compléter en une base de E.

Exercice 3 ●●○○ Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels de dimension finie. On précisera leur dimension et une base.

1. $F = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \;\middle|\; \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a\cos(2x) + b\cos x + c\right\}$.
2. L'ensemble des suites réelles arithmétiques.
3. $F_\alpha = \{x \longmapsto P(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x} + Q(x)\,\mathrm{e}^{-\alpha x} \mid P,Q \in \mathbb{R}_n[X]\}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
4. $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$, $\mathscr{T}_n^-(\mathbb{K})$, $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 4 ●○○○
On note E l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dont la somme des coefficients de la première colonne est égale à la somme des coefficients de la seconde colonne. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et en déterminer une base et la dimension.

Exercice 5 ●●○○ Montrer que l'ensemble $\{x \longmapsto A\sin(x+\varphi) \mid A, \varphi \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et déterminer sa dimension.

Exercice 6 ●○○○ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille

$$\left(1+X, X+X^2, \dots, X^{n-1}+X^n, X^n\right)$$

est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 7 ●●○○ Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la famille $\left((X-a)^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ constitue une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Donner, pour tout $p \in [\![0\,,n]\!]$, les coordonnées de X^p dans cette base.

Exercice 8 ●○○○ Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Déterminer un entier $d \in \mathbb{N}^*$ pour lequel la famille $\left(I_n, M, M^2, \dots, M^{d-1}\right)$ est liée.
2. En déduire que M possède un polynôme annulateur non nul.

Exercice 9 ●●○○ **Dimension sur $\mathbb{R}$ vs dimension sur $\mathbb{C}$**
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. On note $\dim_{\mathbb{C}} E$ (resp. $\dim_{\mathbb{R}} E$) la dimension de E comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel (resp. $\mathbb{R}$-espace vectoriel).

1. Déterminer $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2$ et $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2$.
2. Plus généralement, montrer que, pour tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie,

$$\dim_{\mathbb{R}} E = 2\dim_{\mathbb{C}} E.$$

Exercice 10 ●●○○

1. Montrer que l'application $P \longmapsto (P(0), P')$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ sur $\mathbb{K} \times \mathbb{K}[X]$.
2. En déduire une preuve du fait que $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.

Exercice 11 ●●○○ — Suites récurrente linéaire homogène d'ordre 2

Le but de cet exercice est de donner une preuve alternative du théorème 72 du chapitre 15. Il est donc exclu d'utiliser ce théorème dans cet exercice. Fixons $a, b, c \in \mathbb{C}$, avec $ac \neq 0$, et

$$E = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{N}, \quad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0\right\}.$$

1. Montrer que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
2. Montrer que $\varphi : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (u_0, u_1)$ est un isomorphisme de E sur $\mathbb{C}^2$.
3. **a.** Si r est une racine de $aX^2 + bX + c$, montrer que $(r^n) \in E$.
   b. Si r est une racine double de $aX^2 + bX + c$, montrer que $(nr^n) \in E$.
4. Retrouver les résultats du théorème 72 du chapitre 15.

Exercice 12 ●●○○ — Banque d'exercices CCINP 2024 (55)

Soit a un nombre complexe. On note E l'ensemble des suites complexes telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia-1)u_n \quad \text{avec } (u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2.$$

1. **a.** Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites complexes.
   b. Déterminer, en le justifiant, la dimension de E.
2. Dans cette question, on considère la suite de E définie par $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$. Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre complexe u_n en fonction de n.

   Indication : discuter suivant les valeurs de a.

Exercice 13 ●●●○ — Mines-Ponts MP 2022

On veut déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ satisfaisant la relation

$$(\star) \quad \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{2i\pi P(n)} = 1.$$

On pose $B_0 = 1$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $B_k = \dfrac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}$.

1. Soit P vérifiant $(\star)$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) \in \mathbb{Z}$.
2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(B_0, \ldots, B_N)$ est une base de $\mathbb{R}_N[X]$.
3. Montrer que $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifie $(\star)$ si et seulement si P est une combinaison linéaire à coefficients entiers des B_k.

Exercice 14 ●●●○ — ENS SR 2022 Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la suite $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ par

$$P_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![1\,, n]\!], \quad P_k = \frac{1}{k!}\prod_{l=0}^{k-1}(X-(a+l)).$$

1. **a.** Montrer que $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.
   b. Montrer que, pour tous $k \in [\![0\,, n]\!]$ et $i \in \mathbb{Z}$, $P_k(i) \in \mathbb{Z}$.
2. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$ un polynôme prenant des valeurs entières en $n+1$ entiers consécutifs. Montrer que $P(i) \in \mathbb{Z}$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$.
3. Le résultat précédent est-il préservé si les $n+1$ entiers ne sont plus supposés consécutifs ?
4. Caractériser les polynômes P tels que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

Somme de sous-espaces vectoriels

Exercice 15 ●○○○ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On suppose $\dim F + \dim G > \dim E$. Montrer que F et G ont au moins un vecteur non nul en commun.

Exercice 16 ●○○○ On pose $a = (0,0,1,0)$, $b = (1,1,0,-1)$, $u = (1,0,1,0)$, $v = (0,1,-1,0)$ et $w = (1,1,1,1)$, ainsi que $F = \mathrm{Vect}(a,b)$ et $G = \mathrm{Vect}(u,v,w)$. Déterminer les dimensions de F, G, $F+G$ et $F \cap G$.

Exercice 17 ●○○○

Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et F l'ensemble des matrices de E de trace de nulle.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que $E = F \oplus \mathrm{Vect}(I_n)$.
3. En déduire la dimension de F.

Exercice 18 ●●○○

Déterminer un supplémentaire des sous-espaces vectoriels suivants :

1. $\mathrm{Vect}((1,2,1,1),(2,2,1,1),(0,2,1,1))$ dans $\mathbb{R}^4$.
2. $\left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x+y+2z-t = 0 \;\text{ et }\; y-z+t = 0\right\}$ dans $\mathbb{R}^4$.
3. $\{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(-X) = P\}$ dans $\mathbb{R}_4[X]$.
4. **a.** $\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P'(0) = 0\}$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.
   b. $\{f \in \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$ dans $\mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
5. $\left\{P \in \mathbb{R}_3[X] \;\middle|\; P' + 3p = P(0)X^3 + P(1)X + P(1)\right\}$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 19 ●●○○ On note E l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} + 2u_n,$$

F l'ensemble des suites géométriques de raison 2 et G l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+2} = -b_{n+1} - b_n$.

1. Montrer que E, F et G sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
2. Déterminer une base et la dimension de F et de G respectivement.
3. Déterminer la dimension de E et en déduire que $E = F \oplus G$. Donner alors une base explicite de E.
4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de E définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $u_2 = 2$. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Rang

Exercice 20 ●○○○ Déterminer le rang des familles suivantes

1. $((1,0,1,0),(1,1,0,0),(-1,-1,1,0),(0,0,2,0))$ dans $\mathbb{R}^4$;
2. $\left(X^2+X+1, X^2+3X+1, 2X, X^3+3\right)$ dans $\mathbb{C}[X]$;
3. $(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4)$ dans $\mathscr{L}\left(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}\right)$, où

$$\varphi_1 : (x,y,z,t) \longmapsto x+z, \qquad \varphi_2 : (x,y,z,t) \longmapsto -x+2y,$$
$$\varphi_3 : (x,y,z,t) \longmapsto x+y-z+t, \qquad \varphi_4 : (x,y,z,t) \longmapsto y+t.$$

Exercice 21 ●○○○ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n$ des vecteurs de E. On suppose que les vecteurs $x_1+y_1,\dots,x_n+y_n$ sont linéairement indépendants. Montrer l'inégalité $\operatorname{rg}(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n) \geqslant n$.

Exercice 22 ●●○○ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{F} = (u_1,\dots,u_n)$ une famille de n vecteurs de E de rang s. On suppose qu'il existe une sous-famille $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$ à r éléments, avec $r < n$, de rang s'. Montrer que $s' \geqslant r+s-n$.

Exercice 23 ●○○○ Banque d'exercices CCINP 2024 (60)
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$.
2. L'endomorphisme f est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.
4. A-t-on $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$?

Exercice 24 ●○○○ Banque d'exercices CCINP 2024 (90)
Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés de $\mathbb{K}$.

1. Montrer que l'application Φ suivante est un isomorphisme d'espaces vectoriels :

$$\Phi : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ P & \longmapsto & (P(a_1),P(a_2),P(a_3)) \end{array}\right.$$

2. On note (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose

$$\forall k \in \{1,2,3\}, \quad L_k = \Phi^{-1}(e_k).$$

   a. Justifier que (L_1,L_2,L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
   b. Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3.
3. Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1,L_2,L_3).
4. *Application.* On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0,1), B(1,3), C(2,1)$. Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C.

Exercice 25 ●●○○ Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
On note $\mathbb{K}[A] = \{P(A) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$ l'ensemble des polynômes en A.

1. Montrer que $\mathbb{K}[A]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que A^{-1} est un polynôme en A en étudiant l'application $M \longmapsto AM$ définie sur $\mathbb{K}[A]$.

Exercice 26 ●●○○
On note Δ l'endomorphisme $P \longmapsto P(X+1) - P(X)$ de $\mathbb{R}[X]$.

1. Déterminer $\operatorname{Ker} \Delta$.
2. Déterminer $\operatorname{Im} \Delta|_{\mathbb{R}_n[X]}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que Δ est surjectif de $\mathbb{R}[X]$ sur lui-même.

Applications linéaires définies arbitrairement

Exercice 27 ●○○○ — Banque d'exercices CCINP 2024 (62)
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\,\mathrm{Id}_E = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.
2. Prouver que $E = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}_E)$:
   a. ~~en utilisant le lemme des noyaux ;~~
   b. sans utiliser le lemme des noyaux.
3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie.
   Prouver que $\mathrm{Im}(f + \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}_E)$.

Exercice 28 ●●○○ — Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension finie.

1. Montrer que l'application $\Phi : (f, g) \longmapsto f + g$ de $F \times G$ dans E est linéaire.
2. Déterminer l'image et le noyau de Φ.
3. En déduire une nouvelle preuve de la formule de Grassmann.

Exercice 29 ●●○○ — Mines-Ponts MP 2022
Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

1. Soit $(f, g) \in \mathscr{L}(E, F) \times \mathscr{L}(F, G)$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $h \in \mathscr{L}(F, G)$ tel que $g = h \circ f$.
2. Soit $(g, h) \in \mathscr{L}(E, G) \times \mathscr{L}(F, G)$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $f \in \mathscr{L}(E, F)$ tel que $g = h \circ f$.

Exercice 30 ●●●○ — Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
À quelle condition nécessaire et suffisante l'anneau $\mathscr{L}(E)$ est-il commutatif ?

Exercice 31 ●●●○ — Stabilisation des sous-espaces de dimension k
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $k \in [\![1\,, n-1]\!]$. Que peut-on dire d'un endomorphisme de E laissant stable tous les sous-espaces de dimension k ?

Exercice 32 ●○○○
Soit f un endomorphisme non nul de $\mathbb{K}^3$ tel que $f^2 = 0$. Montrer que $\mathrm{rg}\, f = 1$.

Exercice 33 ●●○○ — Soit f un endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ tel que $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ ne sont pas supplémentaires. Montrer que $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Im}\, f$ ou $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f$.

Exercice 34 ●●○○ — Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer l'équivalence suivante :

$$\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Im}\, u \quad \Longleftrightarrow \quad u^2 = 0_{\mathscr{L}(E)} \ \text{ et } \ \dim E = 2\,\mathrm{rg}\, u.$$

Exercice 35 ●●○○ — Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f = \{0_E\} \iff \mathrm{Ker}\, f^2 = \mathrm{Ker}\, f$.
2. Montrer que $E = \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Im}\, f \iff \mathrm{Im}\, f^2 = \mathrm{Im}\, f$.
3. On suppose à présent E de dimension finie. Montrer que s'équivalent :
   (i) $E = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f$. **(ii)** $\mathrm{Ker}\, f^2 = \mathrm{Ker}\, f$. **(iii)** $\mathrm{Im}\, f^2 = \mathrm{Im}\, f$.

Exercice 36 ●●○○ — Soit f un endomorphisme de rang p d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n, avec $p \leqslant n$. Montrer que f peut s'écrire comme la somme de p endomorphismes de rang 1.

Exercice 37 ●●○○
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. On suppose f nilpotent et on note p son indice de nilpotence.
   a. Écrire avec des quantificateurs l'assertion « $f^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $f^{p-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$ ».
   b. Montrer qu'il existe x dans E tel que la famille $\big(f^k(x)\big)_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ soit libre.
   c. En déduire que $f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
2. a. Montrer que f est nilpotent si
   $$\forall x \in E, \quad \exists p \in \mathbb{N}, \quad f^p(x) = 0_E.$$
   b. Trouver un contre-exemple au résultat précédent lorsque E est de dimension infinie.

Exercice 38 ●●○○ — Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f, g \in \mathscr{L}(E, F)$. Montrer l'inégalité

$$|\mathrm{rg}\, f - \mathrm{rg}\, g| \leqslant \mathrm{rg}(f + g) \leqslant \mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g.$$

On suppose de plus que $F = E$, que $f + g$ est un automorphisme et que $f \circ g = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Montrer que $\mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g = \dim E$.

Exercice 39 ●●○○ — Rang et composition

Soit E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

1. Montrer que, pour tous $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$,

$$\operatorname{rg} f - \operatorname{rg}(g \circ f) = \dim(\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f).$$

2. *Première application.*

a. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que la suite $(r_n)_{n\geqslant 0} = (\operatorname{rg}(u^n))_{n\geqslant 0}$ est convexe, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad r_{n+1} - r_n \geqslant r_n - r_{n-1}.$$

Remarque : ce résultat équivaut à la concavité de la suite $(\dim(\operatorname{Ker} u^n))_{n\geqslant 0}$.

b. Établir plus généralement l'*inégalité de Frobenius* :

$$\forall f, g, h \in \mathscr{L}(E), \quad \operatorname{rg}(f \circ g) + \operatorname{rg}(g \circ h) \leqslant \operatorname{rg}(f \circ g \circ h) + \operatorname{rg} g.$$

3. *Deuxième application – produit nul d'endomorphismes nilpotents .*

a. Montrer que si $v, w \in \mathscr{L}(E)$ commutent avec w nilpotent et $v \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$, alors $\operatorname{Ker} w \cap \operatorname{Im} v \neq \{0_E\}$.

b. Soit $u_1, \ldots, u_n \in \mathscr{L}(E)$ des endomorphismes nilpotents et commutant deux à deux, avec $n = \dim E$. Montrer que $u_1 \circ \cdots \circ u_n = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

4. *Troisième application – endomorphisme nilpotent de rang maximal.*

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent et $n = \dim E$. Montrer que $\operatorname{rg} u = n - 1$ si et seulement si $u^{n-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Indication. $\Longleftarrow$: *s'inspirer de la question* **1** *de l'exercice 37 ;*
$\Longrightarrow$: *montrer que, pour tout* $k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{rg}\big(u^k\big) - \operatorname{rg}\big(u^{k+1}\big) \leqslant \dim(\operatorname{Ker} u)$.

Exercice 40 ●●●○ — Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $u, v \in \mathscr{L}(E,F)$. Montrer que

$$\dim \operatorname{Ker}(u+v) \leqslant \dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v) + \dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v).$$

Exercice 41 ●●●● — Soit E de dimension finie n non nulle et $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que $\operatorname{Im} u^2 = \operatorname{Ker} u^3$. Montrer que $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u^4$.

Exercice 42 ●●●○

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u \circ v = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $u + v \in \mathrm{GL}(E)$.

Exercice 43 ●●●○ — Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E tel que $f^2 \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $f^3 = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Trouver tous les endomorphismes de E qui commutent avec f.

Exercice 44 ●●○○ — Mines-Ponts MP 2022

Soit E un espace vectoriel muni d'une base $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On note u l'endomorphisme de E vérifiant $u(e_n) = e_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on pose

$$\Phi : \mathscr{L}(E) \longrightarrow \mathscr{L}(E), v \longmapsto u \circ v - v \circ u.$$

1. Montrer que Φ n'est pas injectif.

2. Montrer que $\operatorname{Ker} \Phi$ est de dimension infinie.

3. Montrer que, pour tous $x_0 \in E$ et $w \in \mathscr{L}(E)$, il existe $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\Phi(v) = w$ et $v(e_0) = x_0$.

Exercice 45 ●●○○ — Noyaux itérés — Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $K_p = \operatorname{Ker} f^p$ et $I_p = \operatorname{Im} f^p$.

1. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $K_p \subset K_{p+1}$ et $I_{p+1} \subset I_p$.

2. **a.** Montrer qu'il existe un plus petit entier naturel $r \leqslant n$ tel que $K_r = K_{r+1}$.

b. Montrer alors que $I_r = I_{r+1}$ et

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad K_r = K_{r+p} \quad \text{et} \quad I_r = I_{r+p}.$$

c. Montrer enfin que $E = K_r \oplus I_r$.

Exercice 46 ●●●○ — Mines-Ponts MP 2022 (décomposition de Fitting)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. On pose

$$\mathcal{N} = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \operatorname{Ker} u^k \quad \text{et} \quad \mathcal{I} = \bigcap_{k=0}^{+\infty} \operatorname{Im} u^k.$$

1. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{N} = \operatorname{Ker} u^p$ et $\mathcal{I} = \operatorname{Im} u^p$.

Indication : on pourra utiliser les résultats de l'exercice précédent.

2. **a.** Montrer que $E = \mathcal{N} \oplus \mathcal{I}$.

b. Montrer que $\mathcal{N}$ et $\mathcal{I}$ sont stables par u.

c. Montrer que les endomorphismes induits $u|_{\mathcal{N}}$ et $u|_{\mathcal{I}}$ sont respectivement nilpotent et bijectif.

3. Réciproquement, on suppose que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E et stables par u, avec $u|_F$ nilpotent et $u|_G$ bijectif. Montrer que $F = \mathcal{N}$ et $G = \mathcal{I}$.

Hyperplans et formes linéaires

Exercice 47 ●○○○ Montrer qu'une forme linéaire sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel qui n'est pas l'application nulle est surjective.

Exercice 48 ●○○○
Montrer que la famille $\left(P \longmapsto P^{(k)}(0)\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$.

Exercice 49 ●●○○ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f l'application définie par

$$f : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}, P \longmapsto \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est une forme linéaire non nulle. En déduire la dimension de $\operatorname{Ker} f$.
2. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$.

Exercice 50 ●●○○ Dans $\mathbb{R}^4$, écrire le sous-espace engendré par les vecteurs $(2, 1, 0, 2)$ et $(-1, -2, 3, 1)$ comme l'intersection de noyaux de deux formes linéaires.

Exercice 51 ●●●○ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 et $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $u^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$ si et seulement s'il existe un vecteur $a \in \operatorname{Ker} u$ et une forme linéaire λ de E tels que, pour tout $x \in E$, $u(x) = \lambda(x)a$.

Exercice 52 ●○○○ Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que $\{P \in \mathbb{C}[X] \mid P(\alpha) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{C}[X]$ et en déterminer une base.

Exercice 53 ●○○○ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$, ainsi que H_1 et H_2 deux hyperplans distincts de E. Calculer $\dim(H_1 \cap H_2)$.

Exercice 54 ●●○○ Mines-Ponts MP 2022 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$A = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \;\middle|\; \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1) = 0 \right\}.$$

1. Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et en déterminer la dimension.
2. Donner une base de A.

Exercice 55 ●●○○ Mines-Ponts MP 2022
Soit $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \ldots < x_n < y_n$ des réels et $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

1. On suppose que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle\int_{x_i}^{y_i} P(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que $P = 0$.
2. Montrer qu'on peut trouver $P \in \mathbb{R}_n[X]$ non nul vérifiant $\displaystyle\int_{x_i}^{y_i} P(t)\,\mathrm{d}t = 0$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

Exercice 56 ●●●● Mines-Ponts MP 2022
Soit $f \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ vérifiant

$$\forall (A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2, \quad f(AB) = f(BA).$$

Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $f = a\,\mathrm{tr}$.

Indications

Exercice 9. Comment transformer une $\mathbb{C}$-base en $\mathbb{R}$-base ?

Exercice 13. **1.** On pourra procéder par récurrence sur le degré et s'intéresser aux polynômes $P(X + 1) - P(X)$.

Exercice 18. Utiliser l'algorithme de la base incomplète.

Exercice 31. Procéder par récurrence descendante sur k.

Exercice 40. Considérer la restriction de u à $\operatorname{Ker}(u + v)$

Exercice 41. Utiliser le résultat de la question **2.a** de l'exercice 39.

Éléments de réponses

Exercice 1. **1.** Faux. **2.** Faux. **3.** Vrai. **4.** Vrai. **5.** Faux.

Exercice 3. **1.** $\dim F = 3$. **2.** $\dim = 2$. **3.** $\dim F_\alpha = \begin{cases} 2n+2 & \text{si } \alpha = 0 \\ n+1 & \text{sinon.} \end{cases}$

4. $\dim \mathscr{T}_n^+(\mathbb{K}) = \dim \mathscr{T}_n^-(\mathbb{K}) = \dim \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dim \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Exercice 7. **2.** $\left(\binom{p}{k} a^{p-k}\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$.

Exercice 14. **3.** Non (contre-exemple...). **4.** $\{P \in \mathbb{C}[X] \mid P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}\} = \operatorname{Vect}(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Exercice 16. $\dim F = 2$, $\dim G = 3$, $\dim(F + G) = 4$ et $\dim(F \cap G) = 1$.

Exercice 20. **1.** 3. **2.** 3. **3.** 4.

Exercice 30. $\dim E \leqslant 1$.

Exercice 31. Ce sont les homothéties.

Exercice 42. $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

Exercice 53. $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$.