22 Applications linéaires

Cahier de calcul : $\varnothing$. **Banque CCINP :** $\varnothing$.

Applications linéaires définies explicitement

Exercice 1 ●○○○ Montrer que les applications suivantes sont linéaires, déterminer une base de leur noyau et une base de leur image et préciser si elles sont injectives/surjectives. On déterminera en outre une équation de l'image pour les applications de la question **1**.

1. **a.** $(x, y) \longmapsto (y - 3x, 5x + 2y, x + y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.
   b. $(x, y, z) \longmapsto (x + y + z, x + 3y + 2z, 3x + y + 2z)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.
   c. $(x, y, z, t) \longmapsto (x - y + t, 2x + y - z, y + z)$ de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$.
   d. $(x, y, z) \longmapsto (x + z, y + z, 0)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. **a.** $M \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} M$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dans lui-même.
   b. $M \longmapsto AM - \operatorname{tr}(M)A$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dans lui-même.
3. $P \longmapsto X(P'(X + 1) - P'(1))$ de $\mathbb{R}_3[X]$ dans lui-même.

Exercice 2 ●○○○
Pourquoi les applications suivantes ne sont-elles pas linéaires ?

1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x + 1$. 2. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto xy$.

Exercice 3 ●○○○ Montrer que l'application suivante est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer sa réciproque

$$(x, y, z) \longmapsto (x + 2y, 4x - y + 4z, 2x + 2y + z).$$

Exercice 4 ●○○○
Parmi les applications suivantes, lesquelles sont des endomorphismes de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

1. $f \longmapsto f' - 2f'' + 3f$. 2. $f \longmapsto \exp \circ f$. 3. $f \longmapsto (\sin \times f)'$. 4. $f \longmapsto f^{(2025)}$.

Exercice 5 ●●○○ Montrer que l'application

$$\Phi : f \longmapsto \left(x \longmapsto \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

est un endomorphisme de $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Est-il injectif ? surjectif ?

Exercice 6 ●●○○ Soit Δ l'application définie par

$$\Delta : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

1. Montrer que Δ est linéaire.
2. Décrire $\operatorname{Ker} \Delta$.
3. Déterminer un supplémentaire de $\operatorname{Ker} \Delta$.
4. Montrer que Δ est surjectif.
5. Calculer Δ^2 et déterminer $\operatorname{Ker}(\Delta^2)$.

Exercice 7 ●●●○ Soit $a \in \mathbb{K}$. Montrer que $E_a = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(a) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$, isomorphe à $\mathbb{K}[X]$.

Applications linéaires abstraites

Exercice 8 ●○○○ **Quelques réflexes indispensables**
Soit E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$.
   a. Montrer que $g \circ f = 0$ si et seulement si $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$.
   b. Montrer que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g \circ f)$ et $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$.
   c. Montrer que $\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f = f(\operatorname{Ker}(g \circ f))$.
2. Soit $f, g \in \mathscr{L}(E, F)$. Montrer que

$$\operatorname{Im}(f + g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker}(f + g).$$

3. Soit $f, g \in \mathscr{L}(E)$.
   a. Si f et g commutent, montrer que $\operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im} g$ sont stables par f.
   b. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E) = \{x \in E \mid f(x) = \lambda x\}$.
   c. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)$ est stable par f.

Exercice 9 ●●○○ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x_1, \dots, x_n \in E$. On note φ l'application $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ de $\mathbb{K}^n$ dans E.

1. Montrer que φ est linéaire.
2. Interpréter la surjectivité, l'injectivité et la bijectivité de φ en termes de propriétés de la famille $(x_1, \dots, x_n)$ et décrire, dans le dernier cas, la réciproque de φ^{-1}.

Exercice 10 ●○○○ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$. Comparer $\operatorname{Ker} f^p$ et $\operatorname{Ker} f^q$ d'une part, puis $\operatorname{Im} f^p$ et $\operatorname{Im} f^q$ d'autre part, pour tous $p, q \in \mathbb{N}$ avec $p \leqslant q$.

Exercice 11 ●○○○ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non réduit au vecteur nul et $f \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent. Montrer que $\operatorname{Ker} f \neq \{0_E\}$ et $\operatorname{Im} f \neq E$.

Exercice 12 ●●○○ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que $\quad \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\} \iff \operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$.
2. Montrer que $\quad E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f \iff \operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$.

Exercice 13 ●●○○ Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f, g, h \in \mathscr{L}(E)$ tels que $f = g \circ h$, $g = h \circ f$ et $h = f \circ g$.

1. Montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} h$ et $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g = \operatorname{Im} h$.
2. Établir que $f^2 = g^2 = h^2$.
3. Montrer que $f^5 = f$.
4. En déduire que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

Exercice 14 ●●○○ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Si $f^2 = 3f - 2\operatorname{Id}_E$, montrer que $E = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id}_E)$.
2. Si $f^3 = \operatorname{Id}_E$, montrer que $E = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}\big(f^2 + f + \operatorname{Id}_E\big)$.

Exercice 15 ●●○○ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que le polynôme $X^2 + 4X - 5$ annule f.

1. Montrer que f est un automorphisme et déterminer f^{-1} en fonction de f.
2. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 + 4X - 5$.
3. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de f^n en fonction de f et n.

Exercice 16 ●●○○ Soit E, E', F et F' des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On suppose qu'il existe φ un isomorphisme de E sur E' et ψ un isomorphisme de F sur F'. Montrer que l'application

$$\mathscr{L}(E, F) \longrightarrow \mathscr{L}(E', F'), f \longmapsto \psi \circ f \circ \varphi^{-1}.$$

est bien définie et est un isomorphisme.

Exercice 17 ●●●○ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. À tout endomorphisme g de E, on associe l'application φ_g définie sur $\mathscr{L}(E)$ par

$$\forall f \in \mathscr{L}(E), \quad \varphi_g(f) = fg - gf.$$

1. Montrer que φ_g est un endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$.
2. Montrer que si g est nilpotent, alors il en va de même de φ_g.
3. Soit $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que $\varphi_g(f) = \operatorname{Id}_E$.
   - **a.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $fg^n - g^n f = ng^{n-1}$.
   - **b.** Montrer que la famille $\big(g^k\big)_{k \in \mathbb{N}}$ est libre.

Exercice 18 ●●○○ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée, *i.e.*

$$\forall x \in E, \quad \exists \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(x) = \lambda x.$$

Montrer que f est une homothétie.

Exercice 19 ●●●○ Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On suppose que $E = G \oplus H$. Montrer que $A = \{u \in \mathscr{L}(E, F) \mid G \subset \operatorname{Ker} u\}$ est un espace vectoriel isomorphe à $\mathscr{L}(H, F)$.

Exercice 20 ●●●● Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Pour toute application $f \in \mathscr{L}(F, G)$, on considère

$$V_f = \{x + f(x) \mid x \in F\}.$$

1. Montrer que tout supplémentaire S de F vérifie l'assertion

$$\text{« } \forall x \in F, \quad \exists! y \in G, \quad x + y \in S \text{ ».}$$

2. Montrer que tout supplémentaire de F est de la forme V_f, pour une unique application $f \in \mathscr{L}(F, G)$.
3. En déduire que tous les supplémentaires de F sont isomorphes.

Projecteurs et symétries

Exercice 21 ●●○○

1. **a.** Montrer que $\mathbb{R}_2[X] = \mathbb{R}_1[X] \oplus \mathrm{Vect}\big(X^2 + X + 1\big)$.
   b. Déterminer une expression de la projection sur $\mathbb{R}_1[X]$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\big(X^2 + X + 1\big)$.
2. On pose
$$G = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \bigm| x + y + 2z = 0\big\} \quad \text{et} \quad F = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \bigm| x = -y = -z\big\}.$$
   a. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.
   b. Déterminer une expression de la symétrie par rapport à F parallèlement à G.
3. On pose $E = \{f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$.
   a. Montrer que $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = E \oplus \mathrm{Vect}(\exp)$.
   b. Déterminer une expression de la projection sur E parallèlement à $\mathrm{Vect}(\exp)$.

Exercice 22 ●○○○ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p un projecteur de E.

1. Montrer que $\mathrm{Id}_E - p$ est aussi un projecteur de E et relier son image et son noyau à $\mathrm{Im}\, p$ et $\mathrm{Ker}\, p$.
2. Montrer que $2p - \mathrm{Id}_E$ est une symétrie et la caractériser géométriquement.

Exercice 23 ●○○○

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathscr{L}(E)$ et p un projecteur de E. Montrer que p et f commutent si et seulement si $\mathrm{Im}\, p$ et $\mathrm{Ker}\, p$ sont stables par f.

Exercice 24 ●●○○

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p et q deux projecteurs de E. On suppose que p et q commutent. Montrer que $p \circ q$ est la projection sur $\mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q$ de direction $\mathrm{Ker}\, p + \mathrm{Ker}\, q$.

Exercice 25 ●●○○

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p et q deux projecteurs de E.

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur de E si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
2. Le cas échéant, montrer que $\mathrm{Im}\, p$ et $\mathrm{Im}\, q$ sont en somme directe et que $p + q$ est la projection sur $\mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Im}\, q$ de direction $\mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q$.

Exercice 26 ●●○○ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p et q deux projecteurs de E. Montrer que $\mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Ker}\, q$ si et seulement si $p = p \circ q$ et $q = q \circ p$.

Exercice 27 ●●●○ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u et v deux symétries de E. Montrer que
$$\mathrm{Ker}(uv - vu) = \mathrm{Ker}(u + v) \oplus \mathrm{Ker}(u - v).$$

Exercice 28 ●●○○ **Mines-Ponts MP 2022** Soit p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E sur un sous-corps quelconque $\mathbb{K}$ de $\mathbb{C}$.

1. On suppose que $p + q$ est un projecteur. Que dire de $p \circ q$ et $q \circ p$?
2. On suppose que $p - q$ est un projecteur. Que dire de $p \circ q$ et $q \circ p$?
3. Soit $\lambda \in \mathbb{K} \backslash \{1\}$. Déterminer l'inverse de $\mathrm{Id}_E - \lambda p$.

Indications

Exercice 5. Ne pas oublier d'établir que Φ est à valeurs dans $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 7. On pourra considérer la base $\left((X-a)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}[X]$ en lien avec le théorème 41.

Exercice 13. **4.** On pourra considérer la décomposition $x = x - f^4(x) + f^4(x)$, pour tout $x \in E$.

Exercice 19. Le recours au théorème 43 de rigidité est vivement conseillé.

Exercices 24 et 25. Pour les projecteurs, un élément de l'image est son propre antécédent !

Exercice 27. Pour l'inclusion non triviale, on pourra s'intéresser au produit $(u-v)(u+v)$ dans l'anneau $\mathscr{L}(E)$.

Éléments de réponses

Exercice 1. **1.a** $\operatorname{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ et f est injective, $((-3,5,1),(1,2,1))$ est une base de $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Im} f = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, 3x+4y-11z=0\right\}$.

1.b $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}((1,1,-2))$, $((1,1,-2))$ en est une base et f n'est pas injective.
$((1,0,4),(0,1,-1))$ est une base de $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Im} f = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, 4x-y-z=0\right\}$.

1.c $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}((-1,1,-1,2))$, $((-1,1,-1,2))$ en est une base et f n'est pas injective. $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$ et f est donc surjective.

1.d $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}((-1,-1,1))$, $((-1,-1,1))$ en est une base et f n'est pas injective.
$\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2\times\{0\} = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, z=0\right\}$, $((1,0,0),(0,1,0))$ en est une base et f n'est pas surjective.

2.a $\operatorname{Ker} f = \left\{\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} \,\middle|\, a=-3c \text{ et } b=-3d\right\}$, ainsi $\left(\begin{pmatrix} -3 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\operatorname{Ker} f$ et f n'est pas injective. $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 3 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\operatorname{Im} f$ et f n'est pas surjective.

2.b $\operatorname{Ker} f = \left\{0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\right\}$ et f est injective. $\operatorname{Im} f = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et f est surjective.

3. $\operatorname{Ker} f = \mathbb{R}_1[X]$, qui admet pour base canonique $(1,X)$, et f n'est pas injectif.
$\left(X^2,X^3\right)$ est une base de $\operatorname{Im} f$, donc $\operatorname{Im} f \neq \mathbb{R}_3[X]$ et f n'est pas surjective.

Exercice 3. L'automorphisme réciproque est

$$(x,y,z) \longmapsto (9x+2y-8z, -4x-y+4z, -10x-2y+9z).$$

Exercice 4. Les applications des questions **1**, **3** et **4** sont des endomorphismes de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. En revanche l'application de la question **2** n'en n'est pas un (le vecteur nul a pour image la fonction constante égale à 1).

Exercice 5. L'application Φ est injective ($\operatorname{Ker}\Phi = \{0\}$) et non surjective ($\operatorname{Im}\Phi \subset \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$).

Exercice 6. **2.** $\operatorname{Ker}\Delta = \operatorname{Vect}((1)_{n\geqslant 0})$ (sev des suites constantes).

3. $\left\{(u_n)_{n\geqslant 0} \,\middle|\, u_0 = 0\right\}$ (et plus généralement $\left\{(u_n)_{n\geqslant 0} \,\middle|\, u_p = 0\right\}$, pour $p\in\mathbb{N}$) est un supplémentaire de $\operatorname{Ker}\Delta$ dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

4. Les solutions de l'équation $\Delta(u) = v$, pour $u,v\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, sont les suites

$$u = \left(a + \sum_{k=0}^{n-1} v_k\right)_{n\geqslant 0},$$

ainsi Δ est surjectif.

5. $\Delta^2 : (u_n)_{n\geqslant 0} \longmapsto (u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n)$, ainsi les éléments de $\operatorname{Ker}\Delta^2$ sont les suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2 de polynôme caractéristique $(X-1)^2$, soit

$$\operatorname{Ker}\Delta^2 = \left\{(\lambda n+\mu)_{n\geqslant 0} \,\middle|\, \lambda,\mu\in\mathbb{K}\right\} = \operatorname{Vect}((1)_{n\geqslant 0}, (n)_{n\geqslant 0}).$$

Exercice 9. L'application φ est surjective (resp. injective, resp bijective) si et seulement si la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est génératrice (resp. libre, resp. une base de E). Lorsque φ est bijective, φ^{-1} est l'application de E dans $\mathbb{K}^n$ qui à un vecteur x de E associe la famille de ses coordonnées dans la base $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

Exercice 10. Pour tous $p,q\in\mathbb{N}$ avec $p\leqslant q$, on a $\operatorname{Ker} f^p \subset \operatorname{Ker} f^q$ et $\operatorname{Im} f^q \subset \operatorname{Im} f^p$.

Exercice 15. **1.** $f^{-1} = \frac{1}{5}(f + 4\operatorname{Id}_E)$. **2.** Le reste est $\frac{1-(-5)^n}{6}X + \frac{5+(-5)^n}{6}$.
3. $f^n = \frac{1-(-5)^n}{6}f + \frac{5+(-5)^n}{6}\operatorname{Id}_E$.

Exercice 16. L'isomorphisme réciproque est $f \longmapsto \psi^{-1}\circ f\circ\varphi$.

Exercice 21. **1.a** Il suffit de vérifier que $(1, X, X^2+X+1)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (cf. théorème 92 du chapitre 21). **1.b** La projection est donnée par $aX^2+bX+c \longmapsto (b-a)X + c - a$.

2. Pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$,

$$(x,y,z) = \underbrace{\frac{1}{2}(3x+y+2z, -x+y-2z, -x-y)}_{=g\in G} + \underbrace{\frac{x+y+2z}{2}(-1,1,1)}_{=f\in F},$$

ainsi la symétrie par rapport à F parallèlement à G est

$$(x,y,z) \longmapsto f - g = (-2x-y-2z, x+2z, x+y+z).$$

3. Pour tout $f\in\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $f = f(0)\exp + \underbrace{f - f(0)\exp}_{\in E}$, ainsi la projection sur E parallèlement à la droite $\operatorname{Vect}(\exp)$ est $f \longmapsto f - f(0)\exp$.

Exercice 22. Cf. théorème 57.