

# 21 | Espaces vectoriels

Cahier de calcul :  $\emptyset$ .

Banque CCINP :  $\emptyset$ .

## (Sous-)Espaces vectoriels et combinaisons linéaires

— **Exercice 1** ●○○○ — Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $F$  une partie non vide de  $E$ . Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes

- (i)  $\forall x, y \in F, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \lambda x + \mu y \in F;$
- (ii)  $\forall x, y \in F, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda x + y \in F;$
- (iii)  $\forall x, y \in F, \quad x + y \in F \quad \text{et} \quad \forall x \in F, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda x \in F.$

— **Exercice 2** ●●○○ — ?

Construire sur le groupe  $\mathbb{R}_+^*$  une structure de  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

— **Exercice 3** ●○○○ — ✓

- Dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $(5, 5, 1)$  est-il combinaison linéaire de  $(2, 3, 0)$  et  $(3, 2, 0)$  ?
- Dans  $\mathbb{R}[X]$ ,  $16X^3 - 7X^2 + 21X - 4$  est-il combinaison linéaire de  $P = 8X^3 - 5X^2 + 1$  et  $Q = X^2 + 7X - 2$  ?
- Dans  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ,  $x \mapsto \sin(2x)$  est-elle combinaison linéaire de sinus et cosinus ?

— **Exercice 4** ●○○○ — ✓

Montrer que, pour tout  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ ,  $A^2$  est combinaison linéaire de  $I_2$  et  $A$ .

— **Exercice 5** ●○○○ — ✓

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

- $\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x = y\}.$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - 5y - 1 = 0\}.$
- $\{(x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\}.$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + x + y^2 = 0\}.$
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y \text{ et } 3y - 2z = 0\}.$
- $\{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg P \geq 2\}.$
- $\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(X^2) = P' + X^4 P\}.$
- $\{f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) + f(1) = f'(0)\}.$

— **Exercice 6** ●○○○ — ✓

Les sous-ensembles suivants de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  en sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

- $A = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ est continue sur } \mathbb{R}\}.$
- $B = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}\}.$
- $C = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ est paire}\}.$
- $D = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ est } 1 - \text{périodique}\}.$
- $E = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(a) = 0\}, \text{ avec } a \in \mathbb{R}.$
- $F = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \lim_{+\infty} f = 0\right\}.$
- $G = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}\}.$
- $H = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ est monotone sur } \mathbb{R}\}.$

— **Exercice 7** ●●○○ — **Unions, intersections et sommes de sev**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

- Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ .
  - On note  $F + G = \{x + y \mid (x, y) \in F \times G\}$ .  
Montrer que  $F + G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
  - Établir les inclusions  $F \cap G \subset F \subset F + G$  et  $F \cap G \subset G \subset F + G$ .
  - Montrer que  $F \cup G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  si et seulement si  $F \subset G$  ou  $G \subset F$ .
  - Démontrer que  $F + G = \text{Vect}(F \cup G)$ .
- Soit  $(F_i)_{i \in I}$  une suite *filtrante* de sous-espaces vectoriels de  $E$ , i.e. telle que

$$\forall i, j \in I, \quad \exists k \in I, \quad F_i \cup F_j \subset F_k.$$

Montrer que  $\bigcup_{i \in I} F_i$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

— **Exercice 8** ●○○○ — ✓

- Soit les quatre vecteurs de  $\mathbb{R}^3$

$$u = (2, 1, -3), \quad v = (3, 2, -1), \quad s = (1, 0, -5) \quad \text{et} \quad t = (1, 1, 2).$$

Montrer que  $\text{Vect}(u, v) = \text{Vect}(s, t)$ .

- Montrer par des opérations sur les Vect l'égalité

$$\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}((X - 1)^2, (X - 1)(X + 1), (X + 1)^2).$$

- Soit  $a \in \mathbb{R}$ , et  $u = (1, -1, 1)$  et  $v = (0, 1, a)$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ . À quelle condition nécessaire et suffisante sur  $a$  le vecteur  $(1, 1, 2)$  appartient-il à  $\text{Vect}(u, v)$  ?

— **Exercice 9** ●○○ — Dans  $\mathbb{R}^4$ , donner un système d'équation du sous-espace vectoriel engendré par les deux vecteurs  $(1, 1, 1, 1)$  et  $(1, 2, -1, 3)$ .

— **Exercice 10** ●○○ — ☒

1. Préciser une famille finie de vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  qui engendrent le sous-espace vectoriel  $F = \{(x, -x, -3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ .
2. Préciser une famille finie de vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  qui engendrent le sous-espace vectoriel  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y - 5z = 0 \text{ et } 4x + 3y - 6z = 0\}$ .
3. Soit  $F = \text{Vect}((1, 1, 2, 1), (1, 0, 1, 1), (0, 1, 2, 3))$ .
  - a. Soit  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ . À quelles conditions sur  $x, y, z$  et  $t$  le quadruplet  $(x, y, z, t)$  est-il un élément de  $F$  ?
  - b. Le vecteur  $(-1, 1, 1, -1)$  est-il un élément de  $F$  ? et le vecteur  $(2, -2, 1, 5)$  ?

4. Soit  $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & a & b & c \\ e & e & a & b \\ e & e & e & a \end{pmatrix} \mid (a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5 \right\}$ . Montrer qu'il existe une famille finie de matrices de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  qui engendrent le sous-espace vectoriel  $F$ .

— **Exercice 11** ●○○ — Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\text{Vect}(x \mapsto \cos(kx))_{0 \leq k \leq n} = \text{Vect}(x \mapsto \cos^k x)_{0 \leq k \leq n}.$$

## Sous-espaces affines

— **Exercice 12** ●○○ —

Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces affines.

1.  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 2 \text{ et } 2x + y + 2z = 1\}$ .
2.  $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \text{tr}(M) = 1\}$ .
3.  $\{y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, e^{x^2} y'(x) + y(x) = 1\}$ .
4.  $\{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 2 \text{ et } f(1) = -3\}$ .

— **Exercice 13** ●○○ —

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  deux sous-espaces affines de  $E$  de directions respectives  $F$  et  $G$  et contenant respectivement les points  $A$  et  $B$ .

1. Montrer que  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  sont concourants si et seulement si  $\overrightarrow{AB} \in F + G$ .
2. Montrer que si  $E = F \oplus G$ , alors l'intersection de  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  est réduite à un point.

## Familles libres et bases

— **Exercice 14** ●○○ — ☒

1. La famille  $\left( \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$  est-elle génératrice de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  ?
2. Déterminer une famille génératrice des espaces vectoriels suivants :
  - a.  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
  - b.  $\mathcal{T}_2^+(\mathbb{R})$ .
  - c.  $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ .
3. On note  $E$  l'espace des suites  $(u_n)_{n \geq 0}$  telles que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = 3u_n$ . Déterminer une famille génératrice de  $E$ .

— **Exercice 15** ●○○ — ☒

1. La famille  $((1, -2, 0), (6, 0, 0), (3, 1, 5))$  de  $\mathbb{R}^3$  est-elle libre ?
2. La famille  $((1, -1, 0), (1, 2, 3), (0, 2, 5), (4, -3, -2))$  de  $\mathbb{R}^3$  est-elle libre ?
3. La famille  $\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  est-elle libre ?
4. La famille  $\left( \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  est-elle libre ?

— **Exercice 16** ●○○ — Soit  $\omega \in \mathbb{C}$ . Montrer que la famille  $(1, \omega)$  est libre dans le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$  si et seulement si  $\text{Im } \omega \neq 0$ .

— **Exercice 17** ●○○ — ☒ Soit  $(x_1, \dots, x_5)$  une famille libre d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$ . Les familles suivantes sont-elles libres ?

1.  $(x_5, x_1)$ .
2.  $(x_1, 2x_2, 3x_3)$ .
3.  $(x_1, 2x_3 + x_2, x_5 + 3x_1)$ .
4.  $(x_1, x_1 - 3x_2, x_3 + 2x_2, 2x_3 + x_2)$ .

— **Exercice 18** ●○○ — ☒ Considérons  $u = (1, i, -3)$ ,  $v = (1 - i, 2, i)$  et  $w = (2 + i, 3i, -4)$  des vecteurs de  $\mathbb{C}^3$ . Est-ce que  $(u, v, w)$  est une famille liée de  $\mathbb{C}^3$  vu comme un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel ? un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel ?

— **Exercice 19** ●○○ — ☒

1. La famille  $((2^n)_{n \geq 0}, (3^n)_{n \geq 0})$  de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  est-elle libre ?
2. À quelle condition sur le réel  $\alpha$  la famille  $(x \mapsto \cos x, x \mapsto \cos(x + \alpha))$  de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  est-elle libre ?

### Exercice 20 ●●○○

On considère les fonctions  $f : x \mapsto e^x$ ,  $g : x \mapsto e^{2x}$  et  $h : x \mapsto e^{x^2}$  sur  $\mathbb{R}$ . Montrer de deux manières différentes que la famille  $(f, g, h)$  de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  est libre

1. par une technique d'évaluation ;
2. par une étude asymptotique en  $+\infty$ .

**Exercice 21 ●●○○** Soit  $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$  un famille de polynômes et  $\lambda \in \mathbb{K}$  tels que la suite  $(\text{mult}(P_k, \lambda))_{0 \leq k \leq n}$  soit strictement croissante. Montrer que la famille  $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$  est libre.

**Exercice 22 ●●○○** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $u_1, \dots, u_n \in E$ . Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on pose  $v_k = u_1 + \dots + u_k$ .

1. Montrer que la famille  $(u_1, \dots, u_n)$  engendre  $E$  si et seulement si la famille  $(v_1, \dots, v_n)$  engendre  $E$ .
2. Montrer que la famille  $(u_1, \dots, u_n)$  est libre si et seulement si la famille  $(v_1, \dots, v_n)$  l'est.

**Exercice 23 ●●○○** Montrer que les suites  $(n^k)_{n \geq 0}$ ,  $k$  décrivant  $\mathbb{N}$ , sont linéairement indépendantes dans l'espace  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

### Exercice 24 ●●○○

1. Montrer que la famille  $(x \mapsto |x - \lambda|)_{\lambda \in \mathbb{R}}$  de  $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  est libre.
2. Montrer que la famille  $(x \mapsto e^{\lambda x})_{\lambda \in \mathbb{R}}$  de  $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  est libre.
3. Ces familles sont-elles des bases de  $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  ?

### Exercice 25 ●●○○

1. a. Montrer que la famille  $(\ln p)_{p \in \mathbb{P}}$  est  $\mathbb{Q}$ -libre, i.e. une famille libre du  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel  $\mathbb{R}$ .  
b. En déduire que  $\ln p$  est rationnel pour au plus un nombre premier  $p$ .  
On peut montrer que  $\ln r$  est irrationnel pour tout  $r \in \mathbb{Q}_+^* \setminus \{1\}$ , mais c'est plus difficile.
2. a. Montrer que la famille  $(1, \sqrt{p})$  est  $\mathbb{Q}$ -libre, pour tout  $p \in \mathbb{P}$ .  
b. En déduire que la famille  $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$  est  $\mathbb{Q}$ -libre.

### Exercice 26 ●○○○

Soit  $\mathcal{B} = ((-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1))$  une famille de vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ .

1. Montrer que  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Déterminer, pour tout  $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ , les coordonnées de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

### Exercice 27 ●○○○

1. Montrer que la famille  $((X-1)^2, X^2, (X+1)^2)$  est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$  et déterminer les coordonnées du polynôme  $X^2 + X + 1$  dans cette base.
2. Montrer que la famille  $(X^3 + X^2 - X - 1, X^3 - X^2 + 1, X^3 - X^2 + X, X^3 + 2X + 1)$  est une base de  $\mathbb{R}_3[X]$  et déterminer les coordonnées du polynôme  $X^2$  dans cette base.

**Exercice 28 ●○○○** Les familles suivantes sont-elles des bases ?

1.  $((2, 0, \alpha), (2, \alpha, 2), (\alpha, 0, 2))$ , avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
2.  $((1, 0, 2, 1), (0, 1, 1, 2), (2, 0, 1, 1), (2, 1, 0, 1))$ .

### Exercice 29 ●○○○

Déterminer une base de chacun des sous-espaces de  $\mathbb{R}^3$  définis par

- |  |   |
|--|---|
| a. $x + 2y + 3z = 0$ .   | d. $\begin{cases} 4x - 2y + 6z = 0 \\ -2x + y - 3z = 0 \end{cases}$                   |
| b. $\begin{cases} 2x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$             | e. $\begin{cases} x - 3y - z = 0 \\ 2x - 5y + 2z = 0 \\ 3x - 7y + 5z = 0 \end{cases}$ |
| c. $\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 4x + 2y - 5z = 0 \end{cases}$ |   |

### Exercice 30 ●○○○

Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels suivants.

1.  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}$ .
2.  $\{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = 0\}$ , avec  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ .
3.  $\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(X^2) = (X^3 + 1)P\}$ .
4.  $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0 \text{ et } 2x - z + t = 0\}$ .
5.  $\{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(0) = P(1) = P(2)\}$ .

**Exercice 31 ●●○○** On note  $A$  la matrice  $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$  et  $\mathcal{C}$  l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  qui commutent avec  $A$ . Montrer que  $\mathcal{C}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et en déterminer une base.

## Somme de sous-espaces vectoriels

### Exercice 32 ●●○○

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $F_1, F_2$  et  $G$  trois sous-espaces vectoriels de  $E$ .

1. Comparer  $G \cap (F_1 + F_2)$  et  $(G \cap F_1) + (G \cap F_2)$ .
2. Si  $F_1$  et  $F_2$  sont en somme directe, montrer qu'il en va de même de  $F_1 \cap G$  et  $F_2 \cap G$ .
3. Si  $F_1$  et  $F_2$  sont supplémentaires dans  $E$ ,  $F_1 \cap G$  et  $F_2 \cap G$  le sont-ils dans  $G$ ?

### Exercice 33 ●○○○

On pose  $G = \text{Vect}((1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0))$  et

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = 0 \text{ et } y - z + t = 0\}.$$

Montrer que  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $\mathbb{R}^4$ .

### Exercice 34 ●●○○

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . À quelle condition nécessaire et suffisante  $\text{Vect}((\lambda, \lambda, 1))$  et  $\text{Vect}((1, \lambda, 1), (2, 1, 1))$  sont-ils supplémentaires dans  $\mathbb{R}^3$ ?

### Exercice 35 ●○○○

On note  $\mathcal{P}$  l'ensemble des fonctions paires de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $\mathcal{I}$  l'ensemble des fonctions impaires de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

Montrer que  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{I}$  sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ .

### Exercice 36 ●●○○

On note  $F$  l'ensemble des fonctions constantes sur  $[0, 1]$  et on pose  $G = \left\{ f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(t) dt = 0 \right\}$ .

Montrer que  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ .

### Exercice 37 ●●○○

Montrer que  $\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(X^2) = X^2 P\}$  et  $\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P(2)\}$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}_3[X]$ .

### Exercice 38 ●●○○

On considère les ensembles

$$\mathcal{C} = \{(u_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_{n \geq 0} \text{ converge}\}, \quad \mathcal{N} = \left\{ (u_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \right\}$$

et

$$\mathcal{K} = \{(u_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = a\}.$$

1. Montrer que  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{K}$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .
2. Établir que  $\mathcal{C} = \mathcal{N} \oplus \mathcal{K}$ .

### Exercice 39 ●●●○

Soit  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  distincts. On pose

$$F = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(x_k) = 0\}.$$

Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et en déterminer un supplémentaire dans  $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

Exercice 28. 1. Base si et seulement si  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 2\}$ . 2. Oui.

2. Les coordonnées sont  $\left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right)$ .

Exercice 27. 1. Les coordonnées sont  $\left(\frac{1}{3}, 0, -\frac{7}{4}\right)$ .

Exercice 26. 2. Les coordonnées sont  $\left(\frac{b+c}{a+b}, \frac{2}{a+c}, \frac{2}{a+b}\right)$ .

Exercice 19. 1. Oui. 2.  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ .

Exercice 18. La famille est  $\mathbb{C}$ -libre et  $\mathbb{R}$ -libre.

Exercice 17. 1. Oui. 2. Oui. 3. Oui. 4. Non.

Exercice 15. 1. Oui. 2. Non. 3. Oui. 4. Oui.

3.  $((3^n)_{n \geq 0})$ .

2.b.  $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ . 2.c.  $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ .

Exercice 14. 1. Non. 2.a.  $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ .

3.a.  $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + 3y - 3z + t = 0\}$ . 3.b. Non et oui.

Exercice 10. 1.  $\text{Vect}((1, -1, -3))$ . 2.  $\text{Vect}((3, 8, 6))$ .

Exercice 8. 3.  $a = \frac{7}{2}$ .

Exercice 6. 1. Oui. 2. Oui. 3. Oui. 4. Oui. 5. Oui. 6. Oui. 7. Non. 8. Non.

Oui.

Exercice 5. 1. Non. 2. Non. 3. Oui. 4. Oui. 5. Non. 6. Oui. 7. Non. 8. Oui. 9.

Exercice 4.  $A^2 = \text{tr}(A)A - \det(A)I_2$ .

Exercice 3. 1. Non. 2. Oui :  $2P + 3Q$ . 3. Non.

### Éléments de réponses

Exercice 39. On pourra considérer les polynômes interpolateurs de Lagrange.

Exercice 23. Exploiter la rigidité dans  $\mathbb{R}[X]$ .

Exercice 22. Exprimer également  $u_k$  en fonction des  $v_i$ .

Exercice 2. Penser au transport de structure pour se ramener au  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{R}$ .

### Indications