21 Espaces vectoriels

Cahier de calcul : $\varnothing$. **Banque CCINP :** $\varnothing$.

(Sous-)Espaces vectoriels et combinaisons linéaires

Exercice 1 ●○○○ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie non vide de E. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- **(i)** $\forall x, y \in F, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \lambda x + \mu y \in F$;
- **(ii)** $\forall x, y \in F, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda x + y \in F$;
- **(iii)** $\forall x, y \in F, \quad x + y \in F$ et $\forall x \in F, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda x \in F$.

Exercice 2 ●●○○

Construire sur le groupe $\mathbb{R}_+^*$ une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 3 ●○○○

1. Dans $\mathbb{R}^3$, $(5,5,1)$ est-il combinaison linéaire de $(2,3,0)$ et $(3,2,0)$?
2. Dans $\mathbb{R}[X]$, $16X^3 - 7X^2 + 21X - 4$ est-il combinaison linéaire de $P = 8X^3 - 5X^2 + 1$ et $Q = X^2 + 7X - 2$?
3. Dans $\mathbb{R}^\mathbb{R}$, $x \longmapsto \sin(2x)$ est-elle combinaison linéaire de sinus et cosinus ?

Exercice 4 ●○○○

Montrer que, pour tout $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$, A^2 est combinaison linéaire de I_2 et A.

Exercice 5 ●○○○ Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

1. $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \;\middle|\; x = y\right\}$.
2. $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 2x - 5y - 1 = 0\right\}$.
3. $\{(x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.
4. $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; y = 0\right\}$.
5. $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2) \;\middle|\; x^3 + x + y^2 = 0\right\}$.
6. $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = y \text{ et } 3y - 2z = 0\right\}$.
7. $\{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg P \geqslant 2\}$.
8. $\left\{P \in \mathbb{K}[X] \;\middle|\; P\left(X^2\right) = P' + X^4 P\right\}$.
9. $\{f \in \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0) + f(1) = f'(0)\}$.

Exercice 6 ●○○○ Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ en sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

1. $A = \left\{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ est continue sur } \mathbb{R}\right\}$.
2. $B = \left\{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}\right\}$.
3. $C = \left\{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ est paire}\right\}$.
4. $D = \left\{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ est } 1-\text{périodique}\right\}$.
5. $E = \left\{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \;\middle|\; f(a) = 0\right\}$, avec $a \in \mathbb{R}$.
6. $F = \left\{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \;\middle|\; \lim\limits_{+\infty} f = 0\right\}$.
7. $G = \left\{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}\right\}$.
8. $H = \left\{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ est monotone sur } \mathbb{R}\right\}$.

Exercice 7 ●●○○ **Unions, intersections et sommes de sev**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
   - **a.** On note $F + G = \{x + y \mid (x,y) \in F \times G\}$.
     Montrer que $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.
   - **b.** Établir les inclusions $F \cap G \subset F \subset F + G$ et $F \cap G \subset G \subset F + G$.
   - **c.** Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.
   - **d.** Démontrer que $F + G = \mathrm{Vect}(F \cup G)$.
2. Soit $(F_i)_{i \in I}$ une suite *filtrante* de sous-espaces vectoriels de E, *i.e.* telle que
$$\forall i, j \in I, \quad \exists k \in I, \quad F_i \cup F_j \subset F_k.$$
   Montrer que $\bigcup\limits_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 8 ●○○○

1. Soit les quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$
$$u = (2,1,-3), \quad v = (3,2,-1), \quad s = (1,0,-5) \quad \text{et} \quad t = (1,1,2).$$
   Montrer que $\mathrm{Vect}(u,v) = \mathrm{Vect}(s,t)$.
2. Montrer par des opérations sur les Vect l'égalité
$$\mathbb{R}_2[X] = \mathrm{Vect}\big((X-1)^2, (X-1)(X+1), (X+1)^2\big).$$
3. Soit $a \in \mathbb{R}$, et $u = (1,-1,1)$ et $v = (0,1,a)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. À quelle condition nécessaire et suffisante sur a le vecteur $(1,1,2)$ appartient-il à $\mathrm{Vect}(u,v)$?

Exercice 9 ●●○○ Dans $\mathbb{R}^4$, donner un système d'équation du sous-espace vectoriel engendré par les deux vecteurs $(1,1,1,1)$ et $(1,2,-1,3)$.

Exercice 10 ●○○○

1. Préciser une famille finie de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui engendre le sous-espace vectoriel $F = \{(x,-x,-3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.
2. Préciser une famille finie de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui engendre le sous-espace vectoriel $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x+3y-5z = 0 \text{ et } 4x+3y-6z = 0\right\}$.
3. Soit $F = \mathrm{Vect}((1,1,2,1),(1,0,1,1),(0,1,2,3))$.
   - **a.** Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. À quelles conditions sur x,y,z et t le quadruplet (x,y,z,t) est-il un élément de F ?
   - **b.** Le vecteur $(-1,1,1,-1)$ est-il un élément de F ? et le vecteur $(2,-2,1,5)$?
4. Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & a & b & c \\ e & e & a & b \\ e & e & e & a \end{pmatrix} \,\middle|\, (a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5 \right\}$. Montrer qu'il existe une famille finie de matrices de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ qui engendre le sous-espace vectoriel F.

Exercice 11 ●●○○ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{Vect}(x \longmapsto \cos(kx))_{0 \leqslant k \leqslant n} = \mathrm{Vect}\big(x \longmapsto \cos^k x\big)_{0 \leqslant k \leqslant n}.$$

Sous-espaces affines

Exercice 12 ●○○○
Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces affines.

1. $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x-y+z = 2 \text{ et } 2x+y+2z = 1\right\}$.
2. $\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{tr}(M) = 1\}$.
3. $\left\{y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,\middle|\, \forall x \in \mathbb{R},\quad \mathrm{e}^{x^2} y'(x) + y(x) = 1\right\}$.
4. $\{f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0) = 2 \text{ et } f(1) = -3\}$.

Exercice 13 ●●○○
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux sous-espaces affines de E de directions respectives F et G et contenant respectivement les points A et B.

1. Montrer que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont concourants si et seulement si $\overrightarrow{AB} \in F + G$.
2. Montrer que si $E = F \oplus G$, alors l'intersection de $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ est réduite à un point.

Familles libres et bases

Exercice 14 ●○○○

1. La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est-elle génératrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$?
2. Déterminer une famille génératrice des espaces vectoriels suivants :
   a. $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. **b.** $\mathscr{T}_2^+(\mathbb{R})$. **c.** $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.
3. On note E l'espace des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n$. Déterminer une famille génératrice de E.

Exercice 15 ●○○○

1. La famille $((1,-2,0),(6,0,0),(3,1,5))$ de $\mathbb{R}^3$ est-elle libre ?
2. La famille $((1,-1,0),(1,2,3),(0,2,5),(4,-3,-2))$ de $\mathbb{R}^3$ est-elle libre ?
3. La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est-elle libre ?
4. La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est-elle libre ?

Exercice 16 ●○○○ Soit $\omega \in \mathbb{C}$. Montrer que la famille $(1,\omega)$ est libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ si et seulement si $\mathrm{Im}\,\omega \neq 0$.

Exercice 17 ●○○○ Soit $(x_1,\dots,x_5)$ une famille libre d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. (x_5,x_1).
2. $(x_1,2x_2,3x_3)$.
3. $(x_1,2x_3+x_2,x_5+3x_1)$.
4. $(x_1,x_1-3x_2,x_3+2x_2,2x_3+x_2)$.

Exercice 18 ●○○○ Considérons $u = (1,i,-3)$, $v = (1-i,2,i)$ et $w = (2+i,3i,-4)$ des vecteurs de $\mathbb{C}^3$. Est-ce que (u,v,w) est une famille liée de $\mathbb{C}^3$ vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ? un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

Exercice 19 ●●○○

1. La famille $((2^n)_{n \in \mathbb{N}},(3^n)_{n \in \mathbb{N}})$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est-elle libre ?
2. À quelle condition sur le réel α la famille $(x \longmapsto \cos x, x \longmapsto \cos(x+\alpha))$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est-elle libre ?

Exercice 20 ●●○○

On considère les fonctions $f : x \longmapsto e^x$, $g : x \longmapsto e^{2x}$ et $h : x \longmapsto e^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$. Montrer de deux manières différentes que la famille (f, g, h) de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est libre :

1. par une technique d'évaluation ; **2.** par une étude asymptotique en $+\infty$.

Exercice 21 ●●○○

Soit $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ un famille de polynômes et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que la suite $(\mathrm{mult}(P_k, \lambda))_{0\leqslant k\leqslant n}$ soit strictement croissante.
Montrer que la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est libre.

Exercice 22 ●●○○

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u_1, \ldots, u_n \in E$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $v_k = u_1 + \ldots + u_k$.

1. Montrer que la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre si et seulement si la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ l'est.

2. Montrer que la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ engendre E si et seulement si la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ engendre E.

Exercice 23 ●●○○

Montrer que les suites $\left(n^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$, k décrivant $\mathbb{N}$, sont linéairement indépendantes dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 24 ●●○○

1. Montrer que la famille $(x \longmapsto |x - \lambda|)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ de $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est libre.

2. Montrer que la famille $\left(x \longmapsto e^{\lambda x}\right)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ de $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est libre.

3. Ces familles sont-elles des bases de $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Exercice 25 ●●●○

1. **a.** Montrer que la famille $(\ln p)_{p\in\mathbb{P}}$ est $\mathbb{Q}$-libre, *i.e.* libre dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.

b. En déduire que $\ln p$ est rationnel pour au plus un nombre premier p.

On peut montrer que $\ln r$ est irrationnel pour tout $r \in \mathbb{Q}_+^* \setminus \{1\}$, mais c'est plus difficile.

2. **a.** Montrer que la famille $\left(1, \sqrt{p}\right)$ est $\mathbb{Q}$-libre, pour tout $p \in \mathbb{P}$.

b. En déduire que la famille $\left(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\right)$ est $\mathbb{Q}$-libre.

Exercice 26 ●○○○

Soit $\mathscr{B} = ((-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1))$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer, pour tout $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, les coordonnées de u dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 27 ●○○○

1. Montrer que la famille $\left((X-1)^2, X^2, (X+1)^2\right)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer les coordonnées du polynôme $X^2 + X + 1$ dans cette base.

2. Montrer que la famille $\left(X^3 + X^2 - X - 1, X^3 - X^2 + 1, X^3 - X^2 + X, X^3 + 2X + 1\right)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ et déterminer les coordonnées du polynôme X^2 dans cette base.

Exercice 28 ●○○○

Les familles suivantes sont-elles des bases ?

1. $((2, 0, \alpha), (2, \alpha, 2), (\alpha, 0, 2))$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. $((1, 0, 2, 1), (0, 1, 1, 2), (2, 0, 1, 1), (2, 1, 0, 1))$.

Exercice 29 ●○○○

Déterminer une base de chacun des sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ définis par :

a. $x + 2y + 3z = 0$.

b. $\begin{cases} 2x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 4x + 2y - 5z = 0 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 4x - 2y + 6z = 0 \\ -2x + y - 3z = 0 \end{cases}$

e. $\begin{cases} x - 3y - z = 0 \\ 2x - 5y + 2z = 0 \\ 3x - 7y + 5z = 0 \end{cases}$

Exercice 30 ●○○○

Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels suivants :

1. $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + 2y + z = 0\right\}$.

2. $\{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = 0\}$, avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

3. $\left\{P \in \mathbb{R}_3[X] \;\middle|\; P\left(X^2\right) = \left(X^3 + 1\right)P\right\}$.

4. $\left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x + y = 0 \text{ et } 2x - z + t = 0\right\}$.

5. $\{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(0) = P(1) = P(2)\}$.

Exercice 31 ●●○○

On note A la matrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathscr{C}$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A. Montrer que $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et en déterminer une base.

Somme de sous-espaces vectoriels

Exercice 32 ●●○○

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F_1, F_2 et G trois sous-espaces vectoriels de E.

1. Comparer $G \cap (F_1 + F_2)$ et $(G \cap F_1) + (G \cap F_2)$.
2. Si F_1 et F_2 sont en somme directe, montrer qu'il en va de même de $F_1 \cap G$ et $F_2 \cap G$.
3. Si F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E, $F_1 \cap G$ et $F_2 \cap G$ le sont-ils dans G ?

Exercice 33 ●○○○ On pose $G = \mathrm{Vect}((1,0,0,1),(0,1,1,0))$ et

$$F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x+y+z=0 \ \text{ et } \ y-z+t=0\right\}.$$

Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 34 ●●○○ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. À quelle condition nécessaire et suffisante $\mathrm{Vect}((\lambda,\lambda,1))$ et $\mathrm{Vect}((1,\lambda,1),(2,1,1))$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 35 ●○○○ On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathscr{I}$ l'ensemble des fonctions impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 36 ●●○○ On note F l'ensemble des fonctions constantes sur $[0\,,1]$ et on pose $G = \left\{f \in \mathscr{C}([0\,,1],\mathbb{R}) \;\middle|\; \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0\right\}$. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathscr{C}([0\,,1],\mathbb{R})$.

Exercice 37 ●●○○

Montrer que $\left\{P \in \mathbb{R}_3[X] \;\middle|\; P(X^2) = X^2P\right\}$ et $\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P(2)\}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 38 ●●○○ On considère les ensembles

$$\mathcal{C} = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}\right\}, \quad \mathcal{N} = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \lim_{n\to+\infty} u_n = 0\right\}$$

et

$$\mathcal{K} = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists a \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a\right\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{C}$, $\mathcal{N}$ et $\mathcal{K}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Établir que $\mathcal{C} = \mathcal{N} \oplus \mathcal{K}$.

Exercice 39 ●●●○ Soit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ distincts. On pose

$$F = \{f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \forall k \in [\![1\,,n]\!], \quad f(x_k) = 0\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et en déterminer un supplémentaire dans $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Éléments de réponses

Exercice 3. **1.** Non. **2.** Oui : $2P+3Q$. **3.** Non.

Exercice 4. $A^2 = \mathrm{tr}(A)A - \det(A)I_2$.

Exercice 5. **1.** Non. **2.** Non. **3.** Oui. **4.** Oui. **5.** Non. **6.** Oui. **7.** Non. **8.** Oui. **9.** Oui.

Exercice 6. **1.** Oui. **2.** Oui. **3.** Oui. **4.** Oui. **5.** Oui. **6.** Oui. **7.** Non. **8.** Non.

Exercice 8. **3.** $a = \frac{1}{2}$.

Exercice 10. **1.** $\mathrm{Vect}((1,-1,-3))$. **2.** $\mathrm{Vect}((3,8,6))$.
3.a. $F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; 2x+3y-3z+t=0\right\}$. **3.b.** Non et oui.

Exercice 14. **1.** Non. **2.a.** $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$.
2.b. $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$. **2.c.** $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)$.
3. $((3^n)_{n\in\mathbb{N}})$.

Exercice 15. **1.** Oui. **2.** Non. **3.** Oui. **4.** Oui.

Exercice 17. **1.** Oui. **2.** Oui. **3.** Oui. **4.** Non.

Exercice 18. La famille est $\mathbb{C}$-liée et $\mathbb{R}$-libre.

Exercice 19. **1.** Oui. **2.** $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$.

Exercice 26. **2.** Les coordonnées sont $\left(\frac{b+c}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$.

Exercice 27. **1.** Les coordonnées sont $\left(\frac{1}{4}, 0, -\frac{3}{4}\right)$.
2. Les coordonnées sont $\left(\frac{2}{7}, -\frac{1}{7}, -\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right)$.

Exercice 28. **1.** Base si et seulement si $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0, \pm 2\}$. **2.** Oui.