20 | Convexité

Cahier de calcul : $\varnothing$. **Banque CCINP :** $\varnothing$.

Exercice 1 ●○○○ Montrer que si g est convexe et f est convexe et croissante, alors $f \circ g$ est convexe.

Exercice 2 ●○○○
Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est dite *logarithmiquement convexe* lorsque $\ln \circ f$ est convexe.

1. Montrer que si f est logarithmiquement convexe, alors elle est convexe.
2. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 3 ●○○○ Soit f une bijection convexe strictement monotone d'un intervalle I sur un intervalle J. Que peut-on dire de f^{-1} ?

Exercice 4 ●○○○ Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$,

$$x^{n+1} - (n+1)x + n \geqslant 0.$$

Exercice 5 ●○○○ Montrer que

$$\forall x, y \in \left]1\,, +\infty\right[, \quad \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln x \ln y}.$$

Exercice 6 ●●○○ Montrer que, pour tous $x, y, a, b > 0$,

$$x \ln\left(\frac{x}{a}\right) + y \ln\left(\frac{y}{b}\right) \geqslant (x+y)\ln\left(\frac{x+y}{a+b}\right).$$

Exercice 7 ●●○○ **Oral X** Soit $a, b \geqslant 0$ tels que $a + b = 1$. Montrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \quad 1 + x^a y^b \leqslant (1+x)^a (1+y)^b.$$

Exercice 8 ●○○○ **Comparaison de moyennes**
Soit $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs. On pose

$$A = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}, \ G = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}, \ H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \ \text{ et } \ Q = \sqrt{\frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{n}}.$$

Le réel A (resp. G, H et Q) est appelé la *moyenne arithmétique* (resp. *géométrique*, *harmonique* et *quadratique*) des réels $x_1, \ldots, x_n$. Montrer que $H \leqslant G \leqslant A \leqslant Q$.

Exercice 9 ●●○○ Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Montrer que si f admet un minimum local, alors il s'agit d'un minimum global. Que peut-on dire de l'ensemble des points où ce minimum est atteint ?
2. On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe un réel a tel que $f'(a) = 0$. Montrer que f admet un minimum global en a.

Exercice 10 ●●○○ Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ croissante, non constante et convexe. Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

Exercice 11 ●●○○
Déterminer l'ensemble des fonctions convexes majorées définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 12 ●●●○ **Oral X** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Montrer que f est convexe.

Exercice 13 ●○○○ Soit P une application polynomiale de degré 3. Montrer que la courbe représentative de P possède un unique point d'inflexion dont on précisera l'abscisse.

Exercice 14 ●○○○ Étudier les variations, la convexité et déterminer les éventuels points d'inflexion des fonctions suivantes. En donner l'allure graphique.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.
2. $f(x) = 3x^5 + 15x^4 - 7x + 13$.
3. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
4. $f(x) = \ln\left|\dfrac{x+3}{x+1}\right|$.
5. $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.
6. $f(x) = \sin x - x\cos x$.

Indications/Éléments de réponses

Exercice 7. Considérer $x \longmapsto \ln(1 + \mathrm{e}^x)$.

Exercice 12. Raisonner par l'absurde ou établir que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in [\![0\,, 2^n]\!], \quad f\left(\frac{2^n - k}{2^n}x + \frac{k}{2^n}y\right) \leqslant \frac{2^n - k}{2^n} f(x) + \frac{k}{2^n} f(y).$$

Exercice 13. $x \longmapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ possède un unique point d'inflexion d'abscisse $-\dfrac{b}{3a}$.