

Révisions et compléments pour le calcul algébrique

Cahier de calcul : fiches 1 à 7.

Banque CCINP : $\emptyset$.

Puissances, valeurs absolues et inégalités

— **Exercice 1** ●○○○ — ☒ Simplifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les expressions suivantes :

$$\begin{array}{lll} 1. 3^{n+2} - 3^{n+1} - 7 \times 3^n + 5 \times 3^{n-1}. & 2. \frac{6^3 \times 2^{-5}}{4^2 \times 12^{-4}}. & 3. \frac{5^n \times 12^2}{10^n \times 6^4}. \\ 4. \frac{16^{n+1} + (-4)^{2n+1} + (-2)^{4n}}{8^n}. & 5. \frac{4^n 3^{2n} - 1}{2^n 3^n + 1}. & 6. \frac{32 \times 8^{n-1}}{2^{2n+2} - 4^n}. \end{array}$$

— **Exercice 2** ●○○○ — ☒ Simplifier les écritures suivantes.

$$\begin{array}{ll} 1. \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(2-\sqrt{2})^2}. & 2. \left(\sqrt{7-2\sqrt{6}} + \sqrt{7+2\sqrt{6}} \right)^2. \\ 3. \left(\sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{3+2\sqrt{2}} \right)^2. & 4. \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}. \end{array}$$

— **Exercice 3** ●○○○ — ☒ Soit $x, y \in \mathbb{R}$.

Déterminer en fonction de x, y et $|x-y|$ une expression explicite

- de $\max\{x, y\} + \min\{x, y\}$ et $\max\{x, y\} - \min\{x, y\}$,
- puis de $\max\{x, y\}$ et $\min\{x, y\}$.

— **Exercice 4** ●●○○ — Proposer un encadrement des quantités suivantes.

$$1. \frac{2x^2 - x + 1}{x^2 + \sqrt{x+2} + 3} \text{ pour } x \in [-1, 1]. \quad 2. \frac{x - y^2 + 3}{x^2 + y^2 - y} \text{ pour } x, y \in [1, 2].$$

— **Exercice 5** ●●○○ — ☒

- Quelle est la valeur minimale sur $[1, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto x^2 - x + 1$?
- En déduire un exemple de réel λ pour lequel, pour tout $x \geq 1$, $\frac{x + \sqrt{x}}{x^2 - x + 1} \leq \lambda x$.

— **Exercice 6** ●●○○ — ☒ Résoudre les équations suivantes d'inconnue x réelle.

$$\begin{array}{lll} 1. |4-x| = x. & 2. |x^2 + x - 3| = |x|. & 3. |x+2| + |3x-1| = 4. \\ 4. \sqrt{1-2x} = |x+7|. & 5. x|x| = 3x+2. & 6. x+5 = \sqrt{x+11}. \\ 7. x = 1 + \sqrt{x^2-2}. & 8. x+|x| = \frac{2}{x}. & 9. \sqrt{x}-2 - \frac{7\sqrt{x}-10}{\sqrt{x}+2} = 0. \end{array}$$

— **Exercice 7** ●●○○ — ☒ Résoudre en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$ l'équation, d'inconnue x dans $\mathbb{R}$,

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = a.$$

— **Exercice 8** ●●○○ — ☒ Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{lll} 1. |x^2 - 6x + 4| \leq 1. & 2. 2x - 5 < |x+2|. & 3. |3x-5| \leq |2x+3|. \\ 4. \frac{x}{x+1} \leq \frac{x+2}{x+3}. & 5. \frac{x+5}{x^2-1} \geq 1. & 6. x + \frac{1}{x} \leq |x+4| + 3. \\ 7. x+3 \leq \sqrt{x+5}. & 8. \sqrt{|x+2|} \leq |x-10|. & 9. \sqrt{x^2-1} < 2-x. \end{array}$$

— **Exercice 9** ●●○○ — Soit $x, y \geq 0$.

- Montrer que $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$.
- En déduire que, si $x \geq y$, $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x-y}$.
- En déduire que $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$.

— **Exercice 10** ●●○○ — Soit x, y et z des réels.

- Montrer l'inégalité triangulaire et étudier le cas d'égalité.
- Montrer que $xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$ avec égalité si et seulement si $x = y$.
- Montrer que $(x+y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$ avec égalité si et seulement si $x = y$.
- Montrer que $|x| + |y| \leq |x+y| + |x-y|$ avec égalité si et seulement si $|x| = |y|$.
- Montrer que $xy + yz + xz \leq x^2 + y^2 + z^2$ avec égalité si et seulement si $x = y = z$.

— **Exercice 11** ●●○○ — ☐

- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $1 \leq |x-1| \leq 2$ et $3 \leq |y-1| \leq 4$. Montrer que

$$1 \leq |x-y| \leq 6.$$

- Soient trois réels x, y et z tels que $|x-1| \leq 2$, $|y-2| \leq 1$ et $|z+1| \leq 1$. Montrer que

$$|x-y-z| \leq 4.$$

Sommes

— Exercice 12 ●○○○ — ✓

1. Soit un entier $n \geq 10$. Écrire en extension les sommes et les produits suivants à l'aide de « ... ».

$$\text{a. } \prod_{k=1}^n k. \quad \text{b. } \prod_{k=1}^n (k+2). \quad \text{c. } \sum_{j=3}^{n-1} j. \quad \text{d. } \sum_{i=2}^{n-1} \frac{(i+1)^2}{n}. \quad \text{e. } \prod_{k=1}^{n+1} k^{k+1}.$$

2. Soit x un réel et n un entier tel que $n \geq 24$. Exprimer les réels suivants à l'aide du symbole $\sum$.

$$\begin{array}{ll} \text{a. } 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n. & \text{b. } 2^2 + 3^2 + \dots + n^2. \\ \text{c. } n^2 + n^3 + \dots + n^n. & \text{d. } 2^2 + 3^3 + \dots + n^n. \\ \text{e. } 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}. & \text{f. } 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 53. \\ \text{g. } 8 + 10 + 12 + 14 + \dots + 162. & \text{h. } 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + 57x^{56}. \\ \text{i. } 6x + 12x^2 + 20x^3 + \dots + 1190x^{33}. & \text{j. } \frac{1}{2+\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}. \end{array}$$

— Exercice 13 ●○○○ — ✓

Soit $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$, $(b_k)_{1 \leq k \leq n}$ et $(x_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ trois familles de nombres réels, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$.

1. Sans justification, les relations suivantes sont-elles vraies ou fausses en général ?

$$\begin{array}{ll} \text{a. } \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k. & \text{b. } \sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n a_k \times \sum_{k=1}^n b_k. \\ \text{c. } \sum_{k=1}^n \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^n a_k. & \text{d. } \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^p = \sum_{k=1}^n a_k^p. \end{array}$$

2. Reprendre la question 1. en remplaçant tous les $\sum$ par des $\prod$.
3. Transformer $\sum_{k=1}^n \ln a_k$, sous l'hypothèse que $a_k > 0$, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
4. Est-il vrai que : $\prod_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{i,j} = \sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^m x_{i,j}$?

— Exercice 14 ●○○○ — ✓ Calculer les sommes suivantes, où $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{lll} 1. \sum_{k=823}^{2035} 7. & 2. \sum_{k=1}^n k(k-1). & 3. \sum_{k=1}^n (-1)^k. \\ 4. \sum_{k=1}^n 5^{2k}. & 5. \sum_{k=0}^n (2^k + k^2 + 2). & 6. \sum_{k=1}^n \frac{3^k}{4^{k+1}}. \end{array}$$

— Exercice 15 ●○○○ — ✓ Calculer, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n \exp(kx)$.— Exercice 16 ●○○○ — ✓ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (-2)^n$. Calculer les sommes suivantes.

$$\begin{array}{llll} 1. \sum_{k=0}^{2n} u_k. & 2. \sum_{k=0}^{2n+1} u_k. & 3. \sum_{k=0}^n u_{2k}. & 4. \sum_{k=0}^{2n} (u_k + n). \\ 5. \left(\sum_{k=0}^{2n} u_k \right) + n. & 6. \sum_{k=0}^n u_{k+n}. & 7. \sum_{k=0}^n u_{kn}. & \end{array}$$

— Exercice 17 ●○○○ — ? Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n (k+1)\sqrt{n-k} = \sum_{i=0}^{n-1} (n-i+1)\sqrt{i}.$$

— Exercice 18 ●○○○ — Démontrer les résultats suivants.

$$\begin{array}{l} 1. \text{ Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}. \\ 2. \text{ Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)^3 = 2n^4 - n^2. \\ 3. \text{ Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n kq^k = \frac{q}{(q-1)^2} (nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1). \end{array}$$

— Exercice 19 ●○○○ — Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}.$$

Exercice 20 ●●○○ — ☒ Somme des cubes

Soit $(S_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $S_k = \sum_{i=1}^k i$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Dans cette exercice, on considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, n carrés emboîtés : le plus petit est de côté de longueur S_1 , le suivant de côté de longueur S_2 et le n^{e} de côté de longueur S_n . Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $\mathcal{A}_k$ l'aire du carré de côté de longueur S_k .

1. Pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, exprimer la différence $\mathcal{A}_k - \mathcal{A}_{k-1}$ en fonction de S_k et S_{k-1} .
2. En déduire une expression de $\mathcal{A}_k - \mathcal{A}_{k-1}$ en fonction de k .
3. Exprimer la somme $\sum_{k=2}^n k^3$ en fonction de certains $\mathcal{A}_k$.
4. Conclure quant à la relation liant la somme des n premiers entiers et la somme des n premiers cubes.
5. Application : calculer les sommes $\sum_{1 \leq i, j \leq n} ij$ et $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij$.

L'obtention de cette égalité via cette interprétation géométrique a été exposée par al-Karaji, mathématicien arabe du X^e siècle après J.-C., dans son traité Al-Fakhri fi'l-jabr wa'l-muqabala.

Exercice 21 ●○○○ — ☐ ☒ Sommes télescopiques

1. Démontrer rigoureusement le théorème 4 de simplification télescopique.
2. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{p=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
 - a. Montrer que $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n}}{n} - \frac{\sqrt{n+1}}{n+1}$.
 - b. En déduire une expression explicite de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
 - a. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$.
 - b. En déduire une expression explicite de $\sum_{p=1}^n \frac{1}{1+2+\dots+p}$.
5. Déterminer, pour tout entier $n \geq 2$, une expression explicite de $\sum_{2 \leq j \leq n} \ln\left(1 - \frac{1}{j^2}\right)$.

Exercice 22 ●●○○ — Démonstration alternative du théorème 47

1. Pour tous $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \leq n$, simplifier de deux façons différentes la somme $\sum_{k=m}^n ((k+1)^2 - k^2)$ et retrouver ainsi l'expression de $\sum_{k=m}^n k$ vue en cours.
2. Adapter la méthode précédente au calcul de $\sum_{k=0}^n k^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 23 ●○○○ — ☒

1. Trouver trois réels a, b et c tels que, pour tout entier $k \geq 2$, on ait :

$$\frac{k-5}{k(k^2-1)} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+1}.$$

2. En déduire la valeur de $\sum_{k=2}^n \frac{k-5}{k(k^2-1)}$, pour tout entier $n \geq 2$.

Exercice 24 ●●○○ — ☐ ☒ Démontrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$,

$$\sum_{k=0}^n \frac{2^k}{x^{2^k} + 1} = \frac{1}{x-1} - \frac{2^{n+1}}{x^{2^{n+1}} - 1}.$$

Exercice 25 ●●○○ — ☒ Somme géométrique dérivée Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Simplifier $\sum_{k=0}^n 2^k k$ en suivant pas à pas les indications suivantes :

- compléter d'abord l'égalité : $\sum_{k=0}^n x^k = \dots$;
- dériver des deux côtés ;
- évaluer en 2 et conclure.

Cette technique de calcul est cruciale. Il est recommandé de la retenir !

2. Retrouver le résultat précédent en calculant de deux façons différentes la somme

$$\sum_{0 \leq i < j \leq n} 2^j.$$

3. Adapter la technique de la question 1 au calcul de la somme $\sum_{k=0}^n k^2 3^k$.

— **Exercice 26** ●●○○ — ☒ **Transformation d'Abel**

1. Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ deux suites numériques. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) b_k = a_n b_n - a_0 b_0 - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} (b_{k+1} - b_k).$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $(z-1) \sum_{k=0}^n k z^k$, puis $\sum_{k=0}^n k z^k$.

— **Exercice 27** ●●○○ — ☒ Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les sommes doubles suivantes.

$$\begin{array}{llll} 1. \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} jk. & 2. \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}. & 3. \sum_{1 \leq i, j \leq n} |i-j|. & 4. \sum_{1 \leq i, j \leq n} i 2^j. \\ 5. \sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j). & 6. \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (i+j). & 7. \sum_{1 \leq i, j \leq n} a^{i+j}. & 8. \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a^{i+j}. \end{array}$$

— **Exercice 28** ●●○○ — ☒ **Sommation suivant les « diagonales »**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a_{i,j})_{0 \leq i, j \leq n}$ une famille de nombres complexes. Montrer que

$$\sum_{k=0}^n \left(\sum_{i+j=k} a_{i,j} \right) = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^{n-i} a_{i,j} \right) = \sum_{j=0}^n \left(\sum_{i=0}^{n-j} a_{i,j} \right).$$

Produits

— **Exercice 29** ●○○○ — ☒ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire à l'aide de factorielles

$$1. \prod_{i=0}^n (i+2). \quad 2. \prod_{j=1}^n (j-1). \quad 3. \prod_{k=1}^n (n+k). \quad 4. \prod_{l=1}^n l^2 (l+1)^3.$$

— **Exercice 30** ●○○○ — Montrer SANS RÉCURRENCE que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$2^{n-1} \leq n! \leq n^{n-1}.$$

— **Exercice 31** ●○○○ — Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $(n+1)! \geq \sum_{k=1}^n k!$.

— **Exercice 32** ●●○○ — ☒ Comparer $2^{100!}$ et $2^{100!}$.

— **Exercice 33** ●●○○ — ☒ Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$,

$$\prod_{k=1}^n (1-x_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^n x_k.$$

— **Exercice 34** ●●○○ — ☒ Simplifier les produits suivants, où $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{lllll} 1. \prod_{k=0}^n 3. & 2. \prod_{k=1}^n (2k). & 3. \prod_{k=0}^n (2k+1). & 4. \prod_{k=0}^n q^k. & 5. \prod_{k=0}^n q^{2^k}. \\ 6. \prod_{k=1}^n (-5)^{k^2-k}. & 7. \prod_{k=1}^n (4k^2-1). & 8. \prod_{j=1}^n n^n. & 9. \prod_{k=1}^n \frac{2k+5}{2k+7}. \end{array}$$

— **Exercice 35** ●●○○ — ☒ Simplifier les produits suivants, où $n \in \mathbb{N}^*$.

$$1. \prod_{1 \leq i, j \leq n} x^{i+j}, \text{ avec } x \in \mathbb{C}. \quad 2. \prod_{1 \leq i, j \leq n} i^j. \quad 3. \prod_{1 \leq i, j \leq n} ij. \quad 4. \prod_{p=0}^{n-1} \sum_{k=0}^p 2^{p!k}.$$

— **Exercice 36** ●○○○ — ☒ Soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. On pose $P = \prod_{k=0}^n (1+z^{2^k})$.

Calculer $(1-z)P$ et en déduire une expression simple de P .

— **Exercice 37** ●●○○ — Montrer par récurrence, puis sans récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1. \prod_{k=0}^n (2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}. \quad 2. \prod_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!} = \prod_{k=1}^n k^k.$$

— **Exercice 38** ●●○○ — ☒

1. Factoriser $k^3 - 1$ et $k^3 + 1$, pour tout $k \geq 2$.

2. En déduire, pour tout $n \geq 2$, par télescopage, une simplification de $\prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1}$.

3. En déduire l'existence et la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1}$.

Coefficients binomiaux

— **Exercice 39** ○○○○ — ☒ Calculer les coefficients binomiaux suivants :

$$\binom{4}{2}, \quad \binom{9}{8}, \quad \binom{8}{9}, \quad \binom{7}{3}, \quad \binom{125}{0}, \quad \binom{45}{44} \quad \text{et} \quad \binom{n}{3}, \quad \text{pour } n \geq 3.$$

— **Exercice 40** ●○○○ — ☐ Montrer que $\binom{2n}{n}$ est pair, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

— **Exercice 41** ●●○○ — ☒

1. Calculer les sommes suivantes, où n est un entier naturel.

$$\text{a. } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}. \quad \text{b. } \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}.$$

2. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les sommes $\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k}$ et $\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1}$.

— **Exercice 42** ●●○○ — ☒ Simplifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n}{k}$.

— **Exercice 43** ●●○○ — ☒

1. Simplifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k$:

- a. au moyen de la formule Comité-Président ;
- b. en dérivant de deux façons différentes $x \mapsto (x+1)^n$.

2. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 5^k k$.

3. Via une des stratégies précédentes, simplifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^2$.

— **Exercice 44** ●●○○ — ☒ **Formule de Vandermonde**

1. En procédant par récurrence sur n , montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall (m, p) \in \mathbb{N}^2, \quad \sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \binom{n}{p-k} = \binom{m+n}{p}.$$

2. En utilisant l'égalité précédente, déterminer la valeur de $\sum_{k=0}^p k \binom{m}{k} \binom{n}{p-k}$.

3. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

— **Exercice 45** ●●●○ — ☐ **Formule d'inversion de Pascal**

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ deux suites réelles telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k$.

Montrer alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k$.

Indications

Exercice 11. On pourra utiliser l'inégalité triangulaire (version généralisée)

$$||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|.$$

Exercice 17. Procéder à un changement d'indice.

Exercice 21. 3.a. Utiliser la quantité conjuguée.

Exercice 24. On pourra utiliser un télescopage.

Exercice 28. Noter que $i + j = k$ équivaut à $j = k - i$. On pourra faire un dessin.

Exercice 32. Commencer par majorer $2^{100!}$ par $2^{100 \times 2^{100}}$.

Exercice 33. Procéder par récurrence sur n .

Exercice 40. Utiliser la formule Comité-Président.

Exercice 45. On pourra établir que $\binom{n}{k} \binom{k}{j} = \binom{n}{j} \binom{n-j}{k-j}$.

Éléments de réponses

Exercice 1. 1. $2 \times 3^{n-1}$. 2. $2^2 \times 3^7$. 3. $\frac{1}{9 \times 2^n}$. 4. 13×2^n . 5. $6^n - 1$. 6. $\frac{2^{n+2}}{3}$.

Exercice 2. 1. 1. 2. 24. 3. 4. 4. $5\sqrt{3}$.

Exercice 3. 1. $\max\{x, y\} + \min\{x, y\} = x + y$ et $\max\{x, y\} - \min\{x, y\} = |x - y|$.

$$2. \max\{x, y\} = \frac{x + y + |x - y|}{2} \quad \text{et} \quad \min\{x, y\} = \frac{x + y - |x - y|}{2}.$$

Exercice 5. 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$, ainsi le minimum de $x \mapsto x^2 - x + 1$ sur $[1, +\infty[$ est atteint en 1, soit $1^2 - 1 + 1 = 1$. 2. Ainsi, pour tout $x \in [1, +\infty[$,

$$\frac{x + \sqrt{x}}{x^2 - x + 1} \leq \frac{2x}{\frac{3}{4}} = \frac{8}{3}x,$$

numérateur et dénominateur étant positifs. Finalement $\lambda = 8/3$ convient.

Exercice 6. L'ensemble des solutions est : 1. $\{2\}$. 2. $\{-3, -\sqrt{3}, 1, \sqrt{3}\}$. 3. $\{-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}$.

4. $\{-12, -4\}$. 5. $\{-2, -1, \frac{3+\sqrt{17}}{2}\}$. 6. $\{-2\}$. 7. $\{\frac{3}{2}\}$. 8. $\{1\}$. 9. $\{1, 36\}$.

Exercice 7. L'ensemble des solutions est :
$$\begin{cases} \emptyset & \text{si } a < 1 \\ \left\{ \frac{(a^2 - 1)^2}{4a^2} \right\} & \text{si } a \geq 1. \end{cases}$$

Exercice 8. L'ensemble des solutions est : 1. $[3 - \sqrt{6}, 1] \cup [5, 3 + \sqrt{6}]$. 2. $] -\infty, 7[$. 3. $[\frac{2}{5}, 8]$. 4. $] -\infty, -3[\cup] -1, +\infty[$. 5. $[-2, -1[\cup] 1, 3]$. 6. $] -\infty, 0[\cup [\frac{1}{7}, +\infty[$. 7. $[-5, -1]$. 8. $] -\infty, 7[\cup [14, +\infty[$. 9. $] -\infty, -1[\cup [1, \frac{5}{4}]$.

Exercice 12. 2.a. $\sum_{k=2}^n 2^k$. 2.b. $\sum_{k=2}^n k^2$. 2.c. $\sum_{k=2}^n n^k$. 2.d. $\sum_{k=2}^n n^n$. 2.e. $\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$.

2.f. $\sum_{k=0}^{26} (2k+1)$. 2.g. $\sum_{k=4}^{81} 2k$. 2.h. $\sum_{k=1}^{57} kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{56} (k+1)x^k$.

2.i. $\sum_{k=1}^{33} (k+1)(k+2)x^k$. 2.j. $\sum_{k=2}^{100} \frac{1}{k\sqrt{k-1} + (k-1)\sqrt{k}}$.

Exercice 13. 1.a. Vrai. 1.b. Faux. 1.c. Vrai. 1.d. Faux.

2.a. Faux. 2.b. Vrai. 2.c. Faux. 2.d. Vrai. 3. $\ln\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)$. 4. Faux.

Exercice 14. 1. $7 \times 1213 = 8491$. 2. $\frac{n(n+1)(n-1)}{3}$. 3. $\frac{(-1)^n - 1}{2}$.

4. $\frac{25^{n+1} - 25}{24}$. 5. $2^{n+1} + 2n + 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. 6. $\frac{3}{4}\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$.

Exercice 15.
$$\begin{cases} \frac{e^{(n+1)x} - 1}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ n+1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Exercice 16. 1. $\frac{1+2^{2n+1}}{3}$. 2. $\frac{1-4^{n+1}}{3}$. 3. $\frac{4^{n+1}-1}{3}$. 4. $\frac{1+2^{2n+1}}{3} + n(2n+1)$.

5. $\frac{1+2^{2n+1}}{3} + n$. 6. $\frac{2^{2n+1} + (-2)^n}{3}$. 7.
$$\begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ \frac{(2)^{n(n+1)} - 1}{(-2)^n - 1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 20. 1. $S_k^2 - S_{k-1}^2$. 2. k^3 . 3. $\mathcal{A}_n - \mathcal{A}_1$. 5. $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ et $\frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24}$.

Exercice 21. 2. $\ln(n+1)$. 3.a. . 3.b. $1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

4.a. $a = 1$ et $b = -1$. 4.b. $2 - \frac{2}{n+1}$. 5. $\ln\left(\frac{n+1}{2n}\right)$.

Exercice 23. 1. $a = -2$, $b = 5$ et $c = -3$. 2. $\frac{2}{n} - \frac{3}{n+1} - \frac{1}{2} = -\frac{(n-1)(n+4)}{2n(n+1)}$.

Exercice 24. Puisque $x^{2^{k+1}} - 1 = (x^{2^k} - 1)(x^{2^k} + 1)$,

$$\frac{2^k}{x^{2^k} - 1} - \frac{2^{k+1}}{x^{2^{k+1}} - 1} = \frac{2^k(x^{2^k} + 1) - 2^{k+1}}{(x^{2^k} - 1)(x^{2^k} + 1)} = \frac{2^k(x^{2^k} - 1)}{(x^{2^k} - 1)(x^{2^k} + 1)} = \frac{2^k}{x^{2^k} + 1}$$

Exercice 25. 1. $\sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$ et $\sum_{k=0}^n k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$.

3. $\sum_{k=2}^n k(k-1)x^{k-2} = \frac{n(n-1)x^{n+1} - 2(n^2-1)x^n + n(n+1)x^{n-1} - 2}{(x-1)^3}$ et
$$\sum_{k=0}^n k^2 3^k = \frac{(n^2 - n + 1)3^{n+1} - 3}{2}.$$

Exercice 26. 2. $(z-1) \sum_{k=0}^n kz^k = \frac{nz^{n+2} - (n+1)z^{n+1} + z}{z-1}$.

Exercice 27. 1. $\frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24}$. 2. $\frac{n(n+3)}{4}$. 3. $\frac{n(n-1)(n+1)}{3}$.

4. $n(n+1)(2^n - 1)$. 5. $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. 6. $\frac{n(n+1)^2}{2}$.

7.
$$\begin{cases} \left(\frac{n^2}{a-1}\right)^2 & \text{si } a = 1, \\ \sinon. & \end{cases}$$
 8.
$$\begin{cases} \frac{n(n+1)}{2} & \text{si } a = 1, \\ \frac{2n+1 - (-1)^n}{2} & \text{si } a = -1, \\ \frac{a^2(a-1)^4(a^{n+1}-1)}{(a+1)(a-1)^2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 28. Transformer $\sum_{i+j=k} a_{i,j}$ en $\sum_{i=0}^k a_{i,k-i}$, puis permuter les deux sommes en i et k .

Exercice 29. 1. $(n+2)!$. 2. 0. 3. $\frac{(2n)!}{n!}$. 4. $n!^2(n+1)^3$.

Exercice 32. $2^{100!} > 2^{100!}$.

Exercice 34. 1. 3^{n+1} . 2. $2^n n!$. 3. $\frac{(2n+1)!}{2^n n!}$. 4. $q^{\frac{n(n+1)}{2}}$. 5. $q^{2^{n+1}-1}$. 6. $(-5)^{\frac{n(n-1)(n+1)}{3}}$.

7. $(2n+1)\left(\frac{(2n)!}{2^n n!}\right)^2$. 8. n^{n^2} . 9. $\frac{7}{2n+7}$.

Exercice 35. 1. $x^{n^2(n+1)}$. 2. $(n!)^{\frac{n(n+1)}{2}}$. 3. $n!^{2n}$. 4. $2^{n!} - 1$.

Exercice 36. $(1-z)P = 1 - z^{2^{n+1}}$. **Exercice 38.** 2. $\frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}$. 3. $\frac{2}{3}$.

Exercice 39. 6, 9, 0, 35, 1, 45, $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

Exercice 41. 1.a. 2^n . 1.b. $\begin{cases} 0 & \text{si } n \geq 1 \\ 1 & \text{si } n = 0. \end{cases}$ 2. 2^{n-1} pour les deux sommes.

Exercice 42. $\frac{1}{n+1}$.

Exercice 43. 1. $n2^{n-1}$. 2. $5n6^{n-1}$. 3. $n(n+1)2^{n-2}$.

Exercice 44. 2. $m \binom{m+n-1}{p-1}$. 3. $\binom{2n}{n}$.