1 | Révisions et compléments pour le calcul algébrique

Cahier de calcul : fiches 1 à 7.

Puissances, valeurs absolues et inégalités

Exercice 1 ●○○○ Simplifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les expressions suivantes :

1. $3^{n+2} - 3^{n+1} - 7 \times 3^n + 5 \times 3^{n-1}$.
2. $\dfrac{6^3 \times 2^{-5}}{4^2 \times 12^{-4}}$.
3. $\dfrac{5^n \times 12^2}{10^n \times 6^4}$.
4. $\dfrac{16^{n+1} + (-4)^{2n+1} + (-2)^{4n}}{8^n}$.
5. $\dfrac{4^n 3^{2n} - 1}{2^n 3^n + 1}$.
6. $\dfrac{32 \times 8^{n-1}}{2^{2n+2} - 4^n}$.

Exercice 2 ●○○○ Simplifier les écritures suivantes.

1. $\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2} + \sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}$.
2. $\left(\sqrt{7-2\sqrt{6}} + \sqrt{7+2\sqrt{6}}\right)^2$.
3. $\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^2$.
4. $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \dfrac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

Exercice 3 ●○○○ Soit $x, y \in \mathbb{R}$.
Déterminer en fonction de x, y et $|x-y|$ une expression explicite

1. de $\max\{x,y\} + \min\{x,y\}$ et $\max\{x,y\} - \min\{x,y\}$,
2. puis de $\max\{x,y\}$ et $\min\{x,y\}$.

Exercice 4 ●●○○ Proposer un encadrement des quantités suivantes.

1. $\dfrac{2x^2 - x + 1}{x^2 + \sqrt{x+2} + 3}$ pour $x \in [-1\,, 1]$.
2. $\dfrac{x - y^2 + 3}{x^2 + y^2 - y}$ pour $x, y \in [1\,, 2]$.

Exercice 5 ●●○○

1. Quelle est la valeur minimale sur $[1\,, +\infty[$ de la fonction $x \longmapsto x^2 - x + 1$?
2. En déduire un exemple de réel λ pour lequel, pour tout $x \geqslant 1$, $\dfrac{x+\sqrt{x}}{x^2 - x + 1} \leqslant \lambda x$.

Exercice 6 ●●○○ Résoudre les équations suivantes d'inconnue x dans $\mathbb{R}$.

1. $|4-x| = x$.
2. $\left|x^2 + x - 3\right| = |x|$.
3. $|x+2| + |3x-1| = 4$.
4. $\sqrt{1-2x} = |x+7|$.
5. $x|x| = 3x + 2$.
6. $x + 5 = \sqrt{x+11}$.
7. $x = 1 + \sqrt{x^2 - 2}$.
8. $x + |x| = \dfrac{2}{x}$.
9. $\sqrt{x} - 2 - \dfrac{7\sqrt{x} - 10}{\sqrt{x} + 2} = 0$.

Exercice 7 ●●○○ Résoudre en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$ l'équation, d'inconnue x dans $\mathbb{R}$,

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = a.$$

Exercice 8 ●●○○ Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. $\left|x^2 - 6x + 4\right| \leqslant 1$.
2. $2x - 5 < |x+2|$.
3. $|3x-5| \leqslant |2x+3|$.
4. $\dfrac{x}{x+1} \leqslant \dfrac{x+2}{x+3}$.
5. $\dfrac{x+5}{x^2-1} \geqslant 1$.
6. $x + \dfrac{1}{x} \leqslant |x+4| + 3$.
7. $x + 3 \leqslant \sqrt{x+5}$.
8. $\sqrt{|x+2|} \leqslant |x-10|$.
9. $\sqrt{x^2-1} < 2 - x$.

Exercice 9 ●●○○ Soit $x, y \geqslant 0$.

1. Montrer que $\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y}$.
2. En déduire que, si $x \geqslant y$, $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leqslant \sqrt{x-y}$.
3. En déduire que $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant \sqrt{|x-y|}$.

Exercice 10 ●●○○ Soit x, y et z des réels.

1. Montrer l'inégalité triangulaire et étudier le cas d'égalité.
2. Montrer que $xy \leqslant \dfrac{x^2+y^2}{2}$ avec égalité si et seulement si $x = y$.
3. Montrer que $(x+y)^2 \leqslant 2\left(x^2+y^2\right)$ avec égalité si et seulement si $x = y$.
4. Montrer que $|x| + |y| \leqslant |x+y| + |x-y|$ avec égalité si et seulement si $|x| = |y|$.
5. Montrer que $xy + yz + xz \leqslant x^2 + y^2 + z^2$ avec égalité si et seulement si $x = y = z$.

Exercice 11 ●●○○

1. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $1 \leqslant |x-1| \leqslant 2$ et $3 \leqslant |y-1| \leqslant 4$. Montrer que
$$1 \leqslant |x-y| \leqslant 6.$$
2. Soient trois réels x, y et z tels que $|x-1| \leqslant 2$, $|y-2| \leqslant 1$ et $|z+1| \leqslant 1$. Montrer que
$$|x-y-z| \leqslant 4.$$

Sommes

Exercice 12 ●○○○

1. Soit un entier $n \geqslant 10$. Écrire en extension les sommes et les produits suivants à l'aide de « ... ».

a. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k$. **b.** $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(k+2)$. **c.** $\displaystyle\sum_{j=3}^{n-1} j$. **d.** $\displaystyle\sum_{i=2}^{n-1}\frac{(i+1)^2}{n}$. **e.** $\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1} k^{k+1}$.

2. Soit x un réel et n un entier tel que $n \geqslant 24$. Exprimer les réels suivants à l'aide du symbole $\sum$.

a. $2^2+2^3+\ldots+2^n$. **b.** $2^2+3^2+\ldots+n^2$.
c. $n^2+n^3+\ldots+n^n$. **d.** $2^2+3^3+\ldots+n^n$.
e. $1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}$. **f.** $1+3+5+7+\ldots+53$.
g. $8+10+12+14+\ldots+162$. **h.** $1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+57x^{56}$.
i. $6x+12x^2+20x^3+\ldots+1190x^{33}$. **j.** $\frac{1}{2+\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}$.

Exercice 13 ●○○○

Soit $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$, $(b_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ et $(x_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}$ trois familles de nombres réels, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$.

1. Sans justification, les relations suivantes sont-elles vraies ou fausses en général ?

a. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$. **b.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\sum_{k=1}^{n}a_k\times\sum_{k=1}^{n}b_k$.

c. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lambda a_k=\lambda\sum_{k=1}^{n}a_k$. **d.** $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^p=\sum_{k=1}^{n}a_k^p$.

2. Reprendre la question **1.** en remplaçant tous les $\sum$ par des $\prod$.

3. Transformer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln a_k$, sous l'hypothèse que $a_k>0$, pour tout $k \in [\![1\,,n]\!]$.

4. Est-il vrai que : $\displaystyle\prod_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_{i,j}=\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}x_{i,j}$?

Exercice 14 ●○○○

Calculer les sommes suivantes, où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $\displaystyle\sum_{k=823}^{2035}7$. **2.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k-1)$. **3.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k$.
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}5^{2k}$. **5.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(2^k+k^2+2\right)$. **6.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{3^k}{4^{k+1}}$.

Exercice 15 ●○○○

Calculer, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\exp(kx)$.

Exercice 16 ●○○○

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n=(-2)^n$. Calculer les sommes suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}u_k$. **2.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1}u_k$. **3.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}u_{2k}$. **4.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}(u_k+n)$.
5. $\displaystyle\left(\sum_{k=0}^{2n}u_k\right)+n$. **6.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}u_{k+n}$. **7.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}u_{kn}$.

Exercice 17 ●○○○

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)\sqrt{n-k}=\sum_{i=0}^{n-1}(n-i+1)\sqrt{i}.$$

Exercice 18 ●●○○

Démontrer les résultats suivants.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k(k+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)^3=2n^4-n^2$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}kq^k=\frac{q}{(q-1)^2}\left(nq^{n+1}-(n+1)q^n+1\right)$.

Exercice 19 ●●○○

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}.$$

Exercice 20 ●●○○ Somme des cubes

Soit $(S_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $S_k = \sum_{i=1}^{k} i$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Dans cette exercice, on considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, n carrés emboîtés : le plus petit est de côté de longueur S_1, le suivant de côté de longueur S_2 et le n^{e} de côté de longueur S_n. Pour $k \in [\![1\,,n]\!]$, on note $\mathscr{A}_k$ l'aire du carré de côté de longueur S_k.

1. Pour $k \in [\![2\,,n]\!]$, exprimer la différence $\mathscr{A}_k - \mathscr{A}_{k-1}$ en fonction de S_k et S_{k-1}.
2. En déduire une expression de $\mathscr{A}_k - \mathscr{A}_{k-1}$ en fonction de k.
3. Exprimer la somme $\sum_{k=2}^{n} k^3$ en fonction de certains $\mathscr{A}_k$.
4. Conclure quant à la relation liant la somme des n premiers entires et la somme des n premiers cubes.
5. Application : calculer les sommes $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij$ et $\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij$.

L'obtention de cette égalité via cette interprétation géométrique a été exposée par al-Karaji, mathématicien arabe du X^e siècle après J.-C., dans son traité Al-Fakhri fi'l-jabr wa'l-muqabala.

Exercice 21 ●○○○ Sommes télescopiques

1. Démontrer rigoureusement le théorème 4 de simplification télescopique.
2. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{p=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{p}\right)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   - **a.** Montrer que $\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} = \dfrac{\sqrt{n}}{n} - \dfrac{\sqrt{n+1}}{n+1}$.
   - **b.** En déduire une expression explicite de $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   - **a.** Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$.
   - **b.** En déduire une expression explicite de $\sum_{p=1}^{n} \dfrac{1}{1+2+\ldots+p}$.
5. Déterminer, pour tout entier $n \geqslant 2$, une expression explicite de $\sum_{2\leqslant j\leqslant n} \ln\left(1-\dfrac{1}{j^2}\right)$.

Exercice 22 ●●○○ Démonstration alternative du théorème 47

1. Pour tout $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \leqslant n$, simplifier de deux façons différentes la somme $\sum_{k=m}^{n} \left((k+1)^2 - k^2\right)$ et retrouver ainsi l'expression de $\sum_{k=m}^{n} k$ vue en cours.
2. Adapter la méthode précédente au calcul de $\sum_{k=0}^{n} k^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 23 ●○○○

1. Trouver trois réels a, b et c tels que, pour tout entier $k \geqslant 2$, on ait :
$$\frac{k-5}{k(k^2-1)} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+1}.$$
2. En déduire la valeur de $\sum_{k=2}^{n} \dfrac{k-5}{k(k^2-1)}$, pour tout entier $n \geqslant 2$.

Exercice 24 ●●○○

Démontrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$,
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{x^{2^k}+1} = \frac{1}{x-1} - \frac{2^{n+1}}{x^{2^{n+1}}-1}.$$

Exercice 25 ●●●○

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Simplifier $\sum_{k=0}^{n} 2^k k$ en suivant pas à pas les indications suivantes :
   - compléter d'abord l'égalité : $\sum_{k=0}^{n} x^k = \ldots$;
   - dériver des deux côtés ;
   - évaluer en 2 et conclure.

   Cette technique de calcul est cruciale. Il est recommandé de la retenir !
2. Retrouver le résultat précédent en calculant de deux façons différentes la somme
$$\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} 2^j.$$
3. Adapter la technique de la question 1 au calcul de la somme $\sum_{k=0}^{n} k^2 3^k$.

Exercice 26 ●●○○ Transformation d'Abel

1. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites numériques. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)b_k = a_nb_n - a_0b_0 - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}(b_{k+1}-b_k).$$
2. Soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $(z-1)\sum_{k=0}^{n} kz^k$, puis $\sum_{k=0}^{n} kz^k$.

Exercice 27 ●●○○ Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les sommes doubles suivantes.

1. $\sum_{1\leqslant j\leqslant k\leqslant n} jk$.
2. $\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j}$.
3. $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |i-j|$.
4. $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i2^j$.
5. $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \min(i,j)$.
6. $\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} (i+j)$.
7. $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a^{i+j}$.
8. $\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a^{i+j}$.

Exercice 28 ●●●○ Sommation suivant les « diagonales »

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant n}$ une famille de nombres complexes. Montrer que :
$$\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i+j=k} a_{i,j}\right) = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n-i} a_{i,j}\right) = \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n-j} a_{i,j}\right).$$

Produits

Exercice 29 ●○○○ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire à l'aide de factorielles

1. $\prod_{i=0}^{n}(i+2)$.
2. $\prod_{j=1}^{n}(j-1)$.
3. $\prod_{k=1}^{n}(n+k)$.
4. $\prod_{l=1}^{n} l^2(l+1)^3$.

Exercice 30 ●○○○ Montrer SANS RÉCURRENCE que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$2^{n-1} \leqslant n! \leqslant n^{n-1}.$$

Exercice 31 ●○○○ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $(n+1)! \geqslant \sum_{k=1}^{n} k!$.

Exercice 32 ●●●○ Comparer $2^{100!}$ et $2^{100}!$.

Exercice 33 ●●○○ Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in [0\,,1]$,
$$\prod_{k=1}^{n}(1-x_k) \geqslant 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Exercice 34 ●●○○ Simplifier les produits suivants, où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $\prod_{k=0}^{n} 3$.
2. $\prod_{k=1}^{n}(2k)$.
3. $\prod_{k=0}^{n}(2k+1)$.
4. $\prod_{k=0}^{n} q^k$.
5. $\prod_{k=0}^{n} q^{2^k}$.
6. $\prod_{k=1}^{n}(-5)^{k^2-k}$.
7. $\prod_{k=1}^{n}(4k^2-1)$.
8. $\prod_{j=1}^{n} n^n$.
9. $\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+5}{2k+7}$.

Exercice 35 ●●○○ Simplifier les produits suivants, où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} x^{i+j}$, avec $x \in \mathbb{C}$.
2. $\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} i^j$.
3. $\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij$.
4. $\prod_{p=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{p} 2^{p!k}$.

Exercice 36 ●○○○ Soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. On pose $P = \prod_{k=0}^{n}\left(1+z^{2^k}\right)$.

Calculer $(1-z)P$ et en déduire une expression simple de P.

Exercice 37 ●●○○ Montrer par récurrence, puis sans récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

1. $\prod_{k=0}^{n}(2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$.
2. $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{n!}{k!} = \prod_{k=1}^{n} k^k$.

Exercice 38 ●●●○

1. Factoriser k^3-1 et k^3+1, pour tout $k \geqslant 2$.
2. En déduire, pour tout $n \geqslant 2$, par télescopage, une simplification de $\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}$.
3. En déduire l'existence et la valeur de $\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}$.

Coefficients binomiaux

Exercice 39 ○○○○ Calculer les coefficients binomiaux suivants :

$$\binom{4}{2},\quad \binom{9}{8},\quad \binom{8}{9},\quad \binom{7}{3},\quad \binom{125}{0},\quad \binom{45}{44}\quad \text{et}\quad \binom{n}{3},\ \text{pour } n \geqslant 3.$$

Exercice 40 ●○○○ Montrer que $\binom{2n}{n}$ est pair, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 41 ●●○○

1. Calculer les sommes suivantes, où n est un entier naturel.

a. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$. **b.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$.

2. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les sommes $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1}$.

Exercice 42 ●●○○ Simplifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n}{k}$.

Exercice 43 ●●○○

1. Simplifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k$:

a. au moyen de la formule Comité-Président ;

b. en dérivant de deux façons différentes $x \longmapsto (x+1)^n$.

2. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 5^k k$.

3. Via une des stratégies précédentes, simplifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2$.

Exercice 44 ●●○○ **Formule de Vandermonde**

1. En procédant par récurrence sur n, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall (m,p) \in \mathbb{N}^2, \quad \sum_{k=0}^{p} \binom{m}{k}\binom{n}{p-k} = \binom{m+n}{p}.$$

2. En utilisant l'égalité précédente, déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} k \binom{m}{k}\binom{n}{p-k}$.

3. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 45 ●●●○ **Formule d'inversion de Pascal**

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites réelles telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$.

Montrer alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k$.

Indications

Exercice 11. On pourra utiliser l'inégalité triangulaire (version généralisée)

$$\big||x| - |y|\big| \leqslant |x \pm y| \leqslant |x| + |y|.$$

Exercice 17. Procéder à un changement d'indice.

Exercice 21. **3.a.** Utiliser la quantité conjuguée.

Exercice 24. On pourra utiliser un télescopage.

Exercice 28. Noter que $i + j = k$ équivaut à $j = k - i$. On pourra faire un dessin.

Exercice 33. Procéder par récurrence sur n.

Exercice 40. Utiliser la formule Comité-Président.

Exercice 45. On pourra établir que $\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}$.

Éléments de réponses

Exercice 1. **1.** $2 \times 3^{n-1}$. **2.** $2^2 \times 3^7$. **3.** $\dfrac{1}{9 \times 2^n}$. **4.** 13×2^n. **5.** $6^n - 1$. **6** $\dfrac{2^{n+2}}{3}$.

Exercice 2. **1.** 1. **2.** 24. **3.** 4. **4.** $5\sqrt{3}$.

Exercice 3. **1.** $\max\{x,y\} + \min\{x,y\} = x + y$ et $\max\{x,y\} - \min\{x,y\} = |x-y|$.

2. $\max\{x,y\} = \dfrac{x+y+|x-y|}{2}$ et $\min\{x,y\} = \dfrac{x+y-|x-y|}{2}$.

Exercice 5. **1.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$, ainsi le minimum de $x \longmapsto x^2 - x + 1$ sur $[1\,,+\infty[$ est atteint en 1, soit $1^2 - 1 + 1 = 1$. **2.** Ainsi, pour tout $x \in [1\,,+\infty[$,

$$\frac{x + \sqrt{x}}{x^2 - x + 1} \leqslant \frac{2x}{\frac{3}{4}} = \frac{8}{3}x,$$

numérateur et dénominateur étant positifs. Finalement $\lambda = 8/3$ convient.

Exercice 6. L'ensemble des solutions est : **1.** $\{2\}$. **2.** $\{-3, -\sqrt{3}, 1, \sqrt{3}\}$. **3.** $\{-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}$. **4.** $\{-12, -4\}$. **5.** $\left\{-2, -1, \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right\}$. **6.** $\{-2\}$. **7.** $\{\frac{3}{2}\}$. **8.** $\{1\}$. **9.** $\{1, 36\}$.

Exercice 7. L'ensemble des solutions est : $\begin{cases} \varnothing & \text{si } a < 1 \\ \left\{\dfrac{(a^2-1)^2}{4a^2}\right\} & \text{si } a \geqslant 1. \end{cases}$

Exercice 8. L'ensemble des solutions est : **1.** $[3 - \sqrt{6}\,, 1] \cup [5\,, 3 + \sqrt{6}]$. **2.** $]-\infty\,, 7[$. **3.** $[\frac{2}{5}\,, 8]$. **4.** $]-\infty\,, -3[\, \cup\,]-1\,, +\infty[$. **5.** $[-2\,, -1[\, \cup\,]1\,, 3]$. **6.** $]-\infty\,, 0[\, \cup\, [\frac{1}{7}\,, +\infty[$. **7.** $[-5\,, -1]$. **8.** $]-\infty\,, 7] \cup [14\,, +\infty[$. **9.** $]-\infty\,, -1] \cup [1\,, \frac{5}{4}[$.

Exercice 12. **2.a.** $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} 2^k$. **2.b.** $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k^2$. **2.c.** $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} n^k$. **2.d.** $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} n^n$. **2.e.** $\displaystyle\sum_{=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.
2.f. $\displaystyle\sum_{k=0}^{26} (2k+1)$. **2.g.** $\displaystyle\sum_{k=4}^{81} 2k$. **2.h.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{57} kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{56} (k+1)x^k$.
2.i. $\displaystyle\sum_{k=1}^{33} (k+1)(k+2)x^k$. **2.j.** $\displaystyle\sum_{k=2}^{100} \frac{1}{k\sqrt{k-1} + (k-1)\sqrt{k}}$.

Exercice 13. **1.a.** Vrai. **1.b.** Faux. **1.c.** Vrai. **1.d.** Faux. **2.a.** Faux. **2.b.** Vrai. **2.c.** Faux. **2.d.** Vrai. **3.** $\ln\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k\right)$. **4.** Faux.

Exercice 14. **1.** $7 \times 1213 = 8491$. **2.** $\dfrac{n(n+1)(n-1)}{3}$. **3.** $\dfrac{(-1)^n - 1}{2}$. **4.** $\dfrac{25^{n+1} - 25}{24}$. **5.** $2^{n+1} + 2n + 1 + \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. **6.** $\dfrac{3}{4}\left(1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^n\right)$.

Exercice 15. $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{(n+1)x} - 1}{\mathrm{e}^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ n+1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Exercice 16. **1.** $\dfrac{1 + 2^{2n+1}}{3}$. **2.** $\dfrac{1 - 4^{n+1}}{3}$. **3.** $\dfrac{4^{n+1} - 1}{3}$. **4.** $\dfrac{1 + 2^{2n+1}}{3} + n(2n+1)$. **5.** $\dfrac{1 + 2^{2n+1}}{3} + n$. **6.** $\dfrac{2^{2n+1} + (-2)^n}{3}$. **7.** $\begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ \dfrac{(2)^{n(n+1)} - 1}{(-2)^n - 1} & \text{sinon.} \end{cases}$

Exercice 20. **1.** $S_k^2 - S_{k-1}^2$. **2.** k^3. **3.** $\mathscr{A}_n - \mathscr{A}_1$. **5.** $\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$ et $\dfrac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24}$.

Exercice 21. **2.** $\ln(n+1)$. **3.a.** . **3.b.** $1 - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$. **4.a.** $a = 1$ et $b = -1$. **4.b.** $2 - \dfrac{2}{n+1}$. **5.** $\ln\left(\dfrac{n+1}{2n}\right)$.

Exercice 23. **1.** $a = -2$, $b = 5$ et $c = -3$. **2.** $\dfrac{2}{n} - \dfrac{3}{n+1} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{(n-1)(n+4)}{2n(n+1)}$.

Exercice 24. Puisque $x^{2^{k+1}} - 1 = \left(x^{2^k} - 1\right)\left(x^{2^k} + 1\right)$,

$$\frac{2^k}{x^{2^k} - 1} - \frac{2^{k+1}}{x^{2^{k+1}} - 1} = \frac{2^k\left(x^{2^k} + 1\right) - 2^{k+1}}{\left(x^{2^k} - 1\right)\left(x^{2^k} + 1\right)} = \frac{2^k\left(x^{2^k} - 1\right)}{\left(x^{2^k} - 1\right)\left(x^{2^k} + 1\right)} = \frac{2^k}{x^{2^k} + 1}$$

Exercice 25. **1.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} \underset{x \neq 1}{=} \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$.
3. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k(k-1)x^{k-2} \underset{x \neq 1}{=} \frac{n(n-1)x^{n+1} - 2(n^2-1)x^n + n(n+1)x^{n-1} - 2}{(x-1)^3}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 3^k = \frac{(n^2 - n + 1)3^{n+1} - 3}{2}$.

Exercice 26. **2.** $\displaystyle(z-1)\sum_{k=0}^{n} kz^k \underset{z \neq 1}{=} = \frac{nz^{n+2} - (n+1)z^{n+1} + z}{z - 1}$.

Exercice 27. **1.** $\dfrac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24}$. **2.** $\dfrac{n(n+3)}{4}$. **3.** $\dfrac{n(n-1)(n+1)}{3}$. **4.** $n(n+1)(2^n - 1)$. **5.** $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. **6.** $\dfrac{n(n+1)^2}{2}$.
7. $\begin{cases} n^2 & \text{si } a = 1, \\ \left(\dfrac{a^{n+1} - a}{a - 1}\right)^2 & \text{sinon.} \end{cases}$ **8.** $\begin{cases} \dfrac{n(n+1)}{2} & \text{si } a = 1, \\ \dfrac{2n + 1 - (-1)^n}{4} & \text{si } a = -1, \\ \dfrac{a^2(a^n - 1)(a^{n+1} - 1)}{(a+1)(a-1)^2} & \text{sinon.} \end{cases}$

Exercice 28. Transformer $\displaystyle\sum_{i+j=k} a_{i,j}$ en $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} a_{i,k-i}$, puis permuter les deux sommes en i et k.

Exercice 29. **1.** $(n+2)!$. **2.** 0. **3.** $\dfrac{(2n)!}{n!}$. **4.** $n!^2(n+1)!^3$.

Exercice 32. $2^{100!} > 2^{100}!$.

Exercice 34. **1.** 3^{n+1}. **2.** $2^n n!$. **3.** $\dfrac{(2n+1)!}{2^n n!}$. **4.** $q^{\frac{n(n+1)}{2}}$. **5.** $q^{2^{n+1}-1}$. **6.** $(-5)^{\frac{n(n-1)(n+1)}{3}}$. **7.** $(2n+1)\left(\dfrac{(2n)!}{2^n n!}\right)^2$. **8.** n^{n^2}. **9.** $\dfrac{7}{2n+7}$.

Exercice 35. **1.** $x^{n^2(n+1)}$. **2.** $(n!)^{\frac{n(n+1)}{2}}$. **3.** $n!^{2n}$. **4.** $2^{n!} - 1$.

Exercice 36. $(1 - z)P = 1 - z^{2^{n+1}}$.

Exercice 38. **2.** $\dfrac{2(n^2 + n + 1)}{3n(n+1)}$. **3.** $\dfrac{2}{3}$.

Exercice 39. 6, 9, 0, 35, 1, 45, $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

Exercice 41. **1.a.** 2^n. **1.b.** $\begin{cases} 0 & \text{si } n \geqslant 1 \\ 1 & \text{si } n = 0. \end{cases}$ **2.** 2^{n-1} pour les deux sommes.

Exercice 42. $\dfrac{1}{n+1}$.

Exercice 43. **1.** $n2^{n-1}$. **2.** $5n6^{n-1}$. **3.** $n(n+1)2^{n-2}$.

Exercice 44. **2.** $m\binom{m+n-1}{p-1}$. **3.** $\binom{2n}{n}$.