19 | Dérivabilité

Cahier de calcul : $\varnothing$. **Banque CCINP :** $\varnothing$.

Exercice 1 ●●○○ — **Monotonie/extrema vs dérivée**

1. Soit $f : x \longmapsto x^2 + 2x^2 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^*$ et prolongée par 0 en 0.
   Montrer que f admet un minimum local en 0, sans être décroissante à gauche et croissante à droite au voisinage de 0.
2. Soit $f : x \longmapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{x}{2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ et prolongée par 0 en 0.
   Montrer que $f'(0) > 0$ et que f n'est pas strictement croissante au voisinage de 0.

Dérivabilité

Exercice 2 ●●○○ — ☑ Pour chacune des fonctions suivantes déterminer son ensemble de définition, son ensemble de dérivabilité et l'expression de sa dérivée.

1. $f(x) = \mathrm{e}^{x\sqrt{x}}$.
2. $f(x) = \ln^7\left(x^2 - 1\right)$.
3. $f(x) = \left(\frac{2x-1}{3x-4}\right)^3$.
4. $f(x) = \sin^3\left(3x^3 - 3x + 3\right)$.
5. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}$.
6. $f(x) = x^{\sqrt{x}}$.
7. $f(x) = (x^4+2)^{\cos x}$.
8. $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$.

Exercice 3 ●○○○ — ☑

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction $f : x \longmapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x^2+x-2}}$.
2. Montrer que cette fonction est prolongeable par continuité en 1.
3. Ainsi prolongée, est-elle dérivable en 1 ?

Exercice 4 ●○○○ — ☑ Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable en a.
Que vaut $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a+h^2)}{h}$?

Exercice 5 ●○○○ — ☑ Montrer que les courbes représentatives des fonctions carré et inverse admettent une unique tangente commune que l'on précisera.

Exercice 6 ●○○○ — Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$.
Montrer que si $f'(a) \neq 0$, alors f est injective au voisinage de a.

Exercice 7 ●●○○ — 💡 Soit $f, g \in \mathscr{D}([0,1],\mathbb{R})$. On suppose que

$$f(0) = g(0), \qquad f(1) = g(1) \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \left]0\,,1\right[, \quad f(x) \neq g(x).$$

Montrer que $(f'(0) - g'(0))(f'(1) - g'(1)) \leqslant 0$.

Dérivées successives

Exercice 8 ●●●○ — 💡☑ Calculer les dérivées successives des fonctions

1. $x \longmapsto \left(x^2 + 3x - 1\right)\mathrm{e}^x$.
2. $x \longmapsto \mathrm{e}^x \cos x$.
3. $x \longmapsto \frac{1+x}{1-x}$.
4. $x \longmapsto \frac{1}{(x-a)(x-b)}$.
5. $x \longmapsto \operatorname{Arctan} x$.
6. $x \longmapsto \frac{1}{x^2 - 2x\cos a + 1}$.

Exercice 9 ●●●○ — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/(1-x^2)} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geqslant 1. \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction φ suivante est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$$
2. En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10 ●●○○ — ☑

1. Calculer la dérivée d'ordre n de $x \longmapsto x^n(1-x)^n$.
2. En déduire $\sum\limits_{p=0}^{n} \binom{n}{p}^2$.

Exercice 11 ●●●○ — 💡 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^{n-1}\,\mathrm{e}^{1/x}\right) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}\,\mathrm{e}^{1/x}.$$

Exercice 12 ●●●○ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{Arctan}^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{(1+x^2)^{n/2}} \sin\left(n \operatorname{Arctan} x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Rolle et Accroissements finis

Exercice 13 ●○○○ Montrer les assertions

1. $\forall x \geqslant 0, \quad x \leqslant \mathrm{e}^x - 1 \leqslant x\,\mathrm{e}^x.$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |\operatorname{Arctan} y - \operatorname{Arctan} x| \leqslant |y - x|.$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant \operatorname{ch} x - 1 \leqslant x \operatorname{sh} x.$

Exercice 14 ●○○○ Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe $x \in \left]0\,,1\right[$ tel que

$$4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c.$$

Exercice 15 ●●○○ Soit $f : [-1\,,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in \left]-1\,,1\right[$ tel que $f'(c) = 4c + 1$.

Exercice 16 ●●○○ **X MP 2022**
Soit $f \in \mathscr{C}^1([0\,,1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. Montrer l'assertion

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \exists c \in [0\,,1], \quad f'(c) + \lambda f(c) = 0.$$

Exercice 17 ●●○○
Soit $f \in \mathscr{C}^2([a\,,b], \mathbb{R})$ telle que $f(a) = f'(a)$ et $f(b) = f'(b)$. Montrer qu'il existe un réel $c \in \left]a\,,b\right[$ tel que $f''(c) = f(c)$.

Exercice 18 ●●○○ **Règle de L'Hôpital**
Soit $f, g \in \mathscr{C}([a\,,b], \mathbb{R}) \cap \mathscr{D}(]a\,,b[, \mathbb{R})$ telles que g' ne s'annule pas sur $]a\,,b[$.

1. Montrer que $g(b) - g(a) \neq 0$ et qu'il existe $c \in \left]a\,,b\right[$ tel que $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.
   (On pourra considérer $x \longmapsto f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x)$.)
2. On suppose que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \ell$.
3. **Application.** Calculer $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^p - 1}{x^q - 1}$, avec $(p, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$.

Exercice 19 ●●●● **Une preuve du théorème de Rolle (X MP 2022)**
Soit $a < b$ des réels et $f : [a\,,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(a) = f(b)$.

1. Soit $n \geqslant 2$ un entier. Montrer qu'il existe $a', b' \in [a\,,b]$ tels que
$$f(a') = f(b') \quad \text{et} \quad b' - a' = \frac{b-a}{n}.$$
2. En déduire une nouvelle preuve du théorème de Rolle.

Exercice 20 ●●○○ **Extension du théorème de Rolle**
Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \cap \mathscr{D}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{+\infty} f = f(0)$. Montrer que f' s'annule sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 21 ●●●○ Soit $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n de degré n, dont le coefficient du terme de plus haut degré est $a_n = (-2)^n$, tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = P_n(x) f(x)$$
   et vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} = -2XP_n + P_n'$.
2. Calculer explicitement P_1, P_2 et P_3, et déterminer leurs racines.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $\pm\infty$.
4. **a.** Montrer par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}$ s'annule en au moins n réels distincts. *(On pourra utiliser l'exercice précédent.)*
   b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est scindé simple sur $\mathbb{R}$.

Exercice 22 ●●●○ **X MP 2022**
Soit $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2}$. En combien de points de $\mathbb{R}$ la dérivée n^{e} de f s'annule-t-elle ?

Exercice 23 ●○○○ Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geqslant 1$. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 24 ●●○○ Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et bornée telle que $\lim\limits_{+\infty} f' = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que $\ell = 0$.

Exercice 25 ●●○○

Soit $a > 0$ et f une fonction dérivable sur $]a, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. On suppose que $\lim\limits_{+\infty} f' = +\infty$. Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.
2. On suppose que $\lim\limits_{+\infty} f' = 0$. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ et que f est lipschitzienne sur un intervalle de la forme $[b, +\infty[$, avec $b > a$.
3. On suppose que $\lim\limits_{+\infty} f' = \ell > 0$. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \ell$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.
4. Montrer que les réciproques de **1**, **2** et **3** sont fausses.

Exercice 26 ●●●○ Théorème de Darboux

Soit $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$. On souhaite montrer qu'alors $f'[I]$ est un intervalle.

Soit $a, b \in I$, avec $a \leqslant b$, et $y \in \mathbb{R}$ compris strictement entre $f'(a)$ et $f'(b)$.

1. Montrer que la fonction $x \longmapsto f(x) - xy$ n'est pas injective sur $[a, b]$.
2. Conclure.

Exercice 27 ●●○○ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que si P est scindé simple sur $\mathbb{R}$, alors il en va de même de P'.
2. Montrer que si P est scindé sur $\mathbb{R}$, alors il en va de même de P'.
3. Les résultats précédents subsistent-ils sur $\mathbb{C}$?

Exercice 28 ●●○○ Soit $n \geqslant 2$ un entier et $p, q \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que le polynôme $X^n + pX + q$ possède au plus trois racines réelles distinctes.
2. Montrer que si n est pair, le polynôme $X^n + pX + q$ possède même au plus deux racines réelles distinctes.

Exercice 29 ●●●○ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note P le polynôme $\left(X^2 - 1\right)^n$.

1. Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $P^{(k)}(-1) = P^{(k)}(1) = 0$.
2. En déduire que $P^{(n)}$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 30 ●●○○ Mines-Ponts MP 2022

Soit $n \geqslant 2$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n scindé à racines simples.
Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $P' + \lambda P$ est scindé à racines simples.

Exercice 31 ●●●○

1. Soit P un trinôme du second degré tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) \geqslant 0$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) + P'(x) + P''(x) \geqslant 0$.
2. Plus généralement, soit P un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ positif sur $\mathbb{R}$.
   - **a.** Que peut-on dire de la parité de n ?
   - **b.** Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(x) \geqslant 0$.

Exercice 32 ●●●● Entrelacement des racines (Mines-Ponts MP 2022)

Soit A et B deux éléments de $\mathbb{R}[X]$ non colinéaires. On suppose que toute combinaison linéaire non triviale de A et B est scindé simple sur $\mathbb{R}$. Si $x_1 < x_2$ sont deux racines de A, montrer que $]x_1, x_2[$ contient au moins une racine de B.

Exercice 33 ●●●● ENS Lyon MP 2022 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n > 0$. Montrer que P est simplement scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!], \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(P^{(i)}(x)\right)^2 - P^{(i-1)}(x)P^{(i+1)}(x) > 0.$$

Applications aux suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 34 ●●○○ Point fixe répulsif

1. Soit $f \in \mathscr{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n \geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $f(a) = a$ et $|f'(a)| > 1$. Montrer que $(u_n)_{n \geqslant 0}$ converge vers a si et seulement si $(u_n)_{n \geqslant 0}$ stationne à a.
2. *Application.* Étudier la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et la relation $u_{n+1} = \dfrac{3}{1 + 2u_n^2}$.

Exercice 35 ●●○○ Soit $u_0 \in [0, 1]$. On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^{u_n}}{\mathrm{e}^{u_n} + 1}.$$

1. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[0, 1]$.
2. Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in [0, 1]$ tel que $\dfrac{\mathrm{e}^{\alpha}}{\mathrm{e}^{\alpha} + 1} = \alpha$.
3. - **a.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n$. Qu'en déduit-on ?
   - **b.** Déterminer à la main un rang n explicite pour lequel u_n est une approximation de α à 10^{-5} près.

Exercice 36 ●○○○ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 2 + \mathrm{e}^{-x}$, dont on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative dans un repère orthonormé, et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2 - \mathrm{e}^{-x}$. On considère alors la suite u définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = g(u_n), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Dresser le tableau des variations de f.
2. **a.** Justifier que $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en exactement deux points d'abscisses respectives $\alpha > 0$ et $\beta < 0$.
   b. Prouver que l'on a $\alpha \in]1\,,2[$, sachant que $\mathrm{e} \approx 2,7$.
3. Étudier les variations de g et en déduire que, pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.
4. Établir que, pour tout $x \in [1\,,2]$, $0 \leqslant g'(x) \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
5. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}|u_n - \alpha|$.
6. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}^n}$.
7. En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Limite de la dérivée

Exercice 37 ●●○○ ☑ Montrer que les fonctions suivantes sont dérivables sur leur intervalle de définition et déterminer leur dérivée. Sont-elles de classe $\mathscr{C}^1$?

1. $f : x \longmapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. $f : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x}{\ln|x|}\cos\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ sur $]-1\,,1[$.

Exercice 38 ●○○○

1. Quelle est la dérivée de $x \longmapsto \ln|x|$ sur $\mathbb{R}^*$?
2. Montrer que la fonction $x \longmapsto x^2 \ln|x|$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 39 ●●○○ Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ une fonction telle que $f'(0) = 0$. Montrer qu'il existe une fonction $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = g\big(x^2\big).$$

Exercice 40 ●●○○ 💡 **Théorème du prolongement de classe $\mathscr{C}^k$**
Soit I un intervalle et $a \in I$. Montrer que si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ sur $I\backslash\{a\}$ et si $\lim\limits_{x\to a} f^{(i)}(x)$ existe et est finie, pour tout $i \in [\![0\,,k]\!]$, alors le prolongement par continuité de f à I est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.

Indications

Exercice 7. On peut s'intéresser aux propriétés de $h = f - g$.

Exercice 8. **1.** Utiliser la formule de Leibniz.
3. à **6.** Décomposer les fractions rationnelles en éléments simples.

Exercice 11. Procéder par récurrence et utiliser éventuellement la formule de Leibniz.

Exercice 15. Considérer la fonction $x \longmapsto f(x) - 2x^2 - x$.

Exercice 16. Considérer la fonction $x \longmapsto f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}$.

Exercice 17. Considérer la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x\big(f'(x) - f(x)\big)$.

Exercice 19. **1.** On pourra considérer la fonction $g : x \longmapsto f(x) - f\big(x + \frac{b-a}{n}\big)$.
2. On pourra commencer par montrer que si f est dérivable en x et si deux suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ convergent vers x et vérifient $a_n < x < b_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = f'(x)$.

Exercice 22. Cf. exercice 21.

Exercice 26. Penser au théorème 52.

Exercice 29. **2.** Utiliser de façon récurrente le théorème de Rolle.

Exercice 30. Appliquer le théorème de Rolle à $x \longmapsto P(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}$.

Exercice 31. **2.b.** Montrer que $\sum\limits_{k=0}^{n} P^{(k)}$ admet un minimum sur $\mathbb{R}$.

Exercice 32. Commencer par montrer que A et B n'ont pas de racine commune, puis considérer $F = A/B$ sur le segment $[x_1\,,x_2]$ en raisonnant par l'absurde.

Exercice 33. On pourra s'intéresser aux dérivées des fractions rationnelles $P^{(i)}/P^{(i-1)}$ en lien avec leurs décompositions en éléments simples.

Exercice 40. Procéder par récurrence sur k avec l'aide du théorème de la limite de la dérivée

Éléments de réponses

Exercice 2. On note $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f et $\mathcal{D}_d$ son ensemble de dérivabilité.

1. $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_d = \mathbb{R}_+$ et $f' : x \longmapsto \dfrac{3}{2}\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{x\sqrt{x}}$

(pour la dérivabilité en 0 il faut revenir à la définition !).

2. $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_d =]-\infty\,,-1[\,\cup\,]1\,,+\infty[$ et $f' : x \longmapsto \dfrac{14x\ln^6(x^2-1)}{x^2-1}$.

3. $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_d = \mathbb{R}\backslash\{\frac{4}{3}\}$ et $f' : x \longmapsto \dfrac{-15(2x-1)^2}{(3x-4)^4}$.

4. $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_d = \mathbb{R}$ et $f' : x \longmapsto 9(3x^2-1)\cos(3x^3-3x+3)\sin^2(3x^3-3x+3)$.

5. $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_d = \mathbb{R}$ et $f' : x \longmapsto \dfrac{-x}{(x^2+3)^{3/2}}$.

6. $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_d = \mathbb{R}_+^*$ et $f' : x \longmapsto \dfrac{2+\ln x}{2}x^{\sqrt{x}-1/2}$.

7. $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_d = \mathbb{R}$ et $f' : x \longmapsto \left(\dfrac{4x^3\cos x}{x^4+2} - \sin(x)\ln(x^4+2)\right)f(x)$.

8. $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_d = \left]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right[+ 2\pi\mathbb{Z}$ et $f' : x \longmapsto \left(\cos(x)\ln(\cos x) - \dfrac{\sin^2 x}{\cos x}\right)f(x)$.

Exercice 3. **2.** $f(1) = 0$. **3.** Non, demi-tangente verticale.

Exercice 4. $f'(a)$.

Exercice 5. La droite d'équation $y = -4x-4$ est tangente à la courbe de la fonction carré (resp. inverse) en -2 (resp. $-\dfrac{1}{2}$).

Exercice 8. **1.** $f : x \longmapsto (x^2+3x-1)\,\mathrm{e}^x \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$f^{(n)} : x \longmapsto (x^2+(2n+3)x+n^2+2n-1)\,\mathrm{e}^x$.

2. $f : x \longmapsto \mathrm{e}^x\cos x \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} : x \longmapsto 2^{n/2}\,\mathrm{e}^x\cos\left(x+n\dfrac{\pi}{4}\right)$.

3. $f : x \longmapsto \dfrac{1+x}{1-x} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}\backslash\{1\},\mathbb{R})$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)} : x \longmapsto \dfrac{2n!}{(1-x)^{n+1}}$.

4. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{(x-a)(x-b)} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}\backslash\{a,b\},\mathbb{R})$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

si $a \neq b$, $f^{(n)} : x \longmapsto \dfrac{(-1)^n n!}{a-b}\left(\dfrac{1}{(x-a)^{n+1}} - \dfrac{1}{(x-b)^{n+1}}\right)$

si $a = b$, $f^{(n)} : x \longmapsto \dfrac{(-1)^n(n+1)!}{(x-a)^{n+2}}$.

5. Arctan $\in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$f^{(n+1)} : x \longmapsto \dfrac{(-1)^n n!}{2i}\left[\dfrac{(x+i)^{n+1}-(x-i)^{n+1}}{(x^2+1)^{n+1}}\right]$.

6. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2-2x\cos a+1} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}\backslash\{\mathrm{e}^{\pm ia}\},\mathbb{R})$ et se ramener à **4.**

Exercice 10. **1.** $x \longmapsto n!\left(\displaystyle\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\binom{n}{p}^2(1-x)^{n-p}x^p\right)$. **2.** $\dbinom{2n}{n}$.

Exercice 18. **3.** $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^p-1}{x^q-1} = \frac{p}{q}$ et $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$.

Exercice 22. En n points.

Exercice 37. **1.** $f' : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{-1/\sqrt{x}}}{2x^{3/2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ et f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

3. $f' : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\ln|x|-1}{(\ln|x|)^2}\cos\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x\ln|x|}\sin\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ et f' n'est pas continue en 0.