

19 | Dérivabilité

Cahier de calcul : \emptyset .

Banque CCINP : \emptyset .

Exercice 1 ●●○○ — Monotonie/extrema vs dérivée

1. Soit $f : x \mapsto x^2 + 2x^2 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$ définie sur \mathbb{R}^* et prolongée par 0 en 0.

Montrer que f admet un minimum local en 0, sans être décroissante à gauche et croissante à droite au voisinage de 0.

2. Soit $f : x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{x}{2}$ définie sur \mathbb{R}^* et prolongée par 0 en 0.

Montrer que $f'(0) > 0$ et que f n'est pas strictement croissante au voisinage de 0.

Dérivabilité

Exercice 2 ●●○○ — Pour chacune des fonctions suivantes déterminer son ensemble de définition, son ensemble de dérivabilité et l'expression de sa dérivée.

1. $f(x) = e^{x\sqrt{x}}$.
2. $f(x) = \ln^7(x^2 - 1)$.
3. $f(x) = \left(\frac{2x-1}{3x-4}\right)^3$.
4. $f(x) = \sin^3(3x^3 - 3x + 3)$.
5. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}}$.
6. $f(x) = x^{x\sqrt{x}}$.
7. $f(x) = (x^4 + 2)^{\cos x}$.
8. $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$.

Exercice 3 ●○○○ —

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x^2 + x - 2}}$.
2. Montrer que cette fonction est prolongeable par continuité en 1.
3. Ainsi prolongée, est-elle dérivable en 1 ?

Exercice 4 ●○○○ — Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en a .

Que vaut $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a+h^2)}{h}$?

Exercice 5 ●○○○ — Montrer que les courbes représentatives des fonctions carré et inverse admettent une unique tangente commune que l'on précisera.

Exercice 6 ●○○○ — Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$.
Montrer que si $f'(a) \neq 0$, alors f est injective au voisinage de a .

Exercice 7 ●●○○ — Soit $f, g \in \mathcal{D}([0, 1], \mathbb{R})$. On suppose que

$$f(0) = g(0), \quad f(1) = g(1) \quad \text{et} \quad \forall x \in]0, 1[, \quad f(x) \neq g(x).$$

Montrer que $(f'(0) - g'(0))(f'(1) - g'(1)) \leq 0$.

Exercice 8 ●●○○ — X MP 2022

Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2, \quad f(xy) = xf(y) + yf(x).$$

1. Déterminer les éléments de E dérivables sur \mathbb{R}_+ .
2. Montrer que si un élément de E est dérivable en un point de \mathbb{R}_+^* , alors il est dérivable sur \mathbb{R}_+ .

Dérivées successives

Exercice 9 ●●○○ — Calculer les dérivées successives de :

1. $x \mapsto (x^2 + 3x - 1)e^x$.
2. $x \mapsto e^x \cos x$.
3. $x \mapsto \frac{1+x}{1-x}$.
4. $x \mapsto \frac{1}{(x-a)(x-b)}$.
5. $x \mapsto \text{Arctan } x$.
6. $x \mapsto \frac{1}{x^2 - 2x \cos a + 1}$.

Exercice 10 ●●○○ — Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/(1-x^2)} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction φ suivante est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} :

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

2. En déduire que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

— Exercice 11 ●●○○ —

- Calculer la dérivée d'ordre n de $x \mapsto x^n(1-x)^n$.
- En déduire $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p}^2$.

— Exercice 12 ●●○○ — Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\frac{d^n}{dx^n} \left(x^{n-1} e^{1/x} \right) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} e^{1/x}.$$

— Exercice 13 ●●○○ — Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{Arctan}^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{(1+x^2)^{n/2}} \sin\left(n \operatorname{Arctan} x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Rolle et Accroissements finis

— Exercice 14 ●○○○ — Montrer que

- $\forall x \geq 0, \quad x \leq e^x - 1 \leq x e^x.$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |\operatorname{Arctan} y - \operatorname{Arctan} x| \leq |y - x|.$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \operatorname{ch} x - 1 \leq \operatorname{sh} x.$

— Exercice 15 ●○○○ — Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe $x \in]0, 1[$ tel que

$$4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c.$$

— Exercice 16 ●●○○ — Soit $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 telle que $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]-1, 1[$ tel que $f'(c) = 4c + 1$.

— Exercice 17 ●●○○ — X MP 2022

Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f'(c) + \lambda f(c) = 0$.

— Exercice 18 ●●○○ —

Soit $f \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$ telle que $f(a) = f'(a)$ et $f(b) = f'(b)$. Montrer qu'il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $f''(c) = f(c)$.

— Exercice 19 ●●○○ — Règle de L'Hôpital Soit $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$ telles que g' ne s'annule pas sur $]a, b[$.

- Montrer que $g(b) - g(a) \neq 0$ et qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

(On pourra considérer $x \mapsto f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(x)$.)

- On suppose que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \ell$.

- Application.** Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^p - 1}{x^q - 1}$, avec $(p, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$.

— Exercice 20 ●●○○ — X MP 2022

Soit $a < b$ des réels et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(a) = f(b)$.

- Soit $n \geq 2$ un entier. Montrer qu'il existe $a', b' \in [a, b]$ tels que $f(a') = f(b')$ et $b - a = n(b' - a')$.
- En déduire une nouvelle preuve du théorème de Rolle.

— Exercice 21 ●●○○ — Extension du théorème de Rolle

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur \mathbb{R}_+ et dérivable sur \mathbb{R}_+^* telle que $\lim_{+\infty} f = f(0)$. Montrer que f' s'annule sur \mathbb{R}_+^* .

— Exercice 22 ●●○○ — Soit $f : x \mapsto e^{-x^2}$ définie sur \mathbb{R} .

- Montrer par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n de degré n , dont le coefficient du terme de plus haut degré est $a_n = (-2)^n$, tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = P_n(x) f(x)$$

et vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} = -2X P_n + P_n'$.

- Calculer explicitement P_1, P_2 et P_3 , et déterminer leurs racines.
- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $\pm\infty$.
- Montrer par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}$ s'annule en au moins n réels distincts. (On pourra utiliser l'exercice précédent.)
 - En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est scindé simple sur \mathbb{R} .

Exercice 23 ●●●○ — **X MP 2022**

Soit $f : x \mapsto e^{-x^2}$. En combien de points de \mathbb{R} la dérivée n^e de f s'annule-t-elle ?

Exercice 24 ●○○○ — Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geq 1$. Montrer que f est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .

Exercice 25 ●●○○ — Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et bornée telle que $\lim_{+\infty} f' = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que $\ell = 0$.

Exercice 26 ●●○○ — Soit $a > 0$ et f une fonction dérivable sur $]a, +\infty[$ et à valeurs dans \mathbb{R} .

- On suppose que $\lim_{+\infty} f' = +\infty$. Montrer que $\lim_{+\infty} f = +\infty$.
- On suppose que $\lim_{+\infty} f' = 0$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ et que f est lipschitzienne sur un intervalle de la forme $[b, +\infty[$, avec $b > a$.
- On suppose que $\lim_{+\infty} f' = \ell > 0$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$.
- Montrer que les réciproques de **1**, **2** et **3** sont fausses.

Exercice 27 ●●○○ — **Théorème de Darboux**

Soit $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$. On souhaite montrer qu'alors $f'(I)$ est un intervalle.

Soit $a, b \in I$, avec $a \leq b$, et $y \in \mathbb{R}$ compris strictement entre $f'(a)$ et $f'(b)$.

- Montrer que la fonction $x \mapsto f(x) - xy$ n'est pas monotone sur $[a, b]$.
- Montrer que la fonction $x \mapsto f(x) - xy$ n'est pas injective sur $[a, b]$.
- Conclure.

Exercice 28 ●●○○ — Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 2.

- Montrer que si P est scindé simple sur \mathbb{R} , alors il en va de même de P' .
- Montrer que si P est scindé sur \mathbb{R} , alors il en va de même de P' .
- Les résultats précédents subsistent-ils sur \mathbb{C} ?

Exercice 29 ●●○○ — Soit $n \geq 2$ un entier et $p, q \in \mathbb{R}$.

- Montrer que le polynôme $X^n + pX + q$ possède au plus trois racines réelles distinctes.
- Montrer que si n est pair, le polynôme $X^n + pX + q$ possède même au plus deux racines réelles distinctes.

Exercice 30 ●●○○ — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note P le polynôme $(X^2 - 1)^n$.

- Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $P^{(k)}(-1) = P^{(k)}(1) = 0$.
- En déduire que $P^{(n)}$ est scindé sur \mathbb{R} .

Exercice 31 ●●○○ — **Mines-Ponts MP 2022**

Soit $n \geq 2$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n scindé à racines simples. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $P' + \lambda P$ est scindé à racines simples.

Exercice 32 ●●○○ —

- Soit P un trinôme du second degré tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) \geq 0$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) + P'(x) + P''(x) \geq 0$.
- Plus généralement, soit P un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ positif sur \mathbb{R} .
 - Que peut-on dire de la parité de n ?
 - Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^n P^{(k)}(x) \geq 0$.

Applications aux suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 33 ●○○○ — Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x - 2 + e^{-x}$, dont on note \mathcal{C} la courbe représentative dans un repère orthonormé, et g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = 2 - e^{-x}$. On considère alors la suite u définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = g(u_n), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

- Dresser le tableau des variations de f .
- Justifier que \mathcal{C} coupe l'axe des abscisses en exactement deux points d'abscisses respectives $\alpha > 0$ et $\beta < 0$.
 - Prouver que l'on a $\alpha \in]1, 2[$, sachant que $e \approx 2,7$.
- Étudier les variations de g et en déduire que, pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq 2$.
- Établir que, pour tout $x \in [1, 2]$, $0 \leq g'(x) \leq \frac{1}{e}$.
- En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{e} |u_n - \alpha|$.
- Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{e^n}$.
- En déduire la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

— **Exercice 34** ●●○○ — Soit $u_0 \in [0, 1]$. On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{e^{u_n} + 1}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[0, 1]$.
2. Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in [0, 1]$ tel que $\frac{e^\alpha}{e^\alpha + 1} = \alpha$.
3.
 - a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$. Qu'en déduit-on ?
 - b. Déterminer à la main un rang n explicite pour lequel u_n est une approximation de α à 10^{-5} près.

— **Exercice 35** ●●○○ — **Point fixe répulsif**

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $f(a) = a$ et $|f'(a)| > 1$. Montrer que $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers a si et seulement si $(u_n)_{n \geq 0}$ est stationnaire.

Limite de la dérivée

— **Exercice 36** ●○○○ —

1. Quelle est la dérivée de $x \mapsto \ln|x|$ sur \mathbb{R}^* ?
2. Montrer que la fonction $x \mapsto x^2 \ln|x|$ est prolongeable en une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

— **Exercice 37** ●●○○ — Montrer que les fonctions suivantes sont dérivables sur leur intervalle de définition et déterminer leur dérivée. Sont-elles de classe \mathcal{C}^1 ?

1. $f : x \mapsto \begin{cases} e^{-1/\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ sur \mathbb{R}_+ .
2. $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{\ln|x|} \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ sur $] -1, 1[$.

— **Exercice 38** ●●○○ — Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ une fonction telle que $f'(0) = 0$. Montrer qu'il existe une fonction $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = g(x^2).$$

— **Exercice 39** ●●○○ — **X MP 2022**

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$. Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = tg(t).$$

Indications

Exercice 7. On peut s'intéresser aux propriétés de $h = f - g$.

Exercice 9. 1. Utiliser la formule de Leibniz.

3. à 6. Décomposer les fractions rationnelles en éléments simples.

Exercice 12. Procéder par récurrence et utiliser éventuellement la formule de Leibniz.

Exercice 16. Considérer la fonction $x \mapsto f(x) - 2x^2 - x$.

Exercice 17. Considérer la fonction $x \mapsto f(x)e^{\lambda x}$.

Exercice 18. Considérer la fonction $x \mapsto e^x(f'(x) - f(x))$.

Exercice 23. Cf. exercice 22.

Exercice 30. 2. Utiliser de façon récurrente le théorème de Rolle.

Exercice 31. Appliquer le théorème de Rolle à $x \mapsto P(x)e^{\lambda x}$.

Exercice 32. 2.b. Montrer que $\sum_{k=0}^n P^{(k)}$ admet un minimum sur \mathbb{R} .

Éléments de réponses

Exercice 2. On note \mathcal{D}_f l'ensemble de définition de f et \mathcal{D}_d son ensemble de dérivabilité.

1. $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_d = \mathbb{R}_+$ et $f' : x \mapsto \frac{3}{2}\sqrt{x}e^{x\sqrt{x}}$

(pour la dérivabilité en 0 il faut revenir à la définition!).

2. $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_d =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ et $f' : x \mapsto \frac{14x \ln^6(x^2 - 1)}{x^2 - 1}$.

3. $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_d = \mathbb{R} \setminus \{\frac{4}{3}\}$ et $f' : x \mapsto \frac{-15(2x - 1)^2}{(3x - 4)^4}$.

4. $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_d = \mathbb{R}$ et $f' : x \mapsto 9(3x^2 - 1) \cos(3x^3 - 3x + 3) \sin^2(3x^3 - 3x + 3)$.

5. $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_d = \mathbb{R}$ et $f' : x \mapsto \frac{-x}{(x^2 + 3)^{3/2}}$.

6. $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_d = \mathbb{R}_+^*$ et $f' : x \mapsto \frac{2 + \ln x}{2} x^{\sqrt{x}-1/2}$.

7. $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_d = \mathbb{R}$ et $f' : x \mapsto \left(\frac{4x^3 \cos x}{x^4 + 2} - \sin(x) \ln(x^4 + 2) \right) f(x)$.

8. $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_d =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[+ 2\pi\mathbb{Z}$ et $f' : x \mapsto \left(\cos(x) \ln(\cos x) - \frac{\sin^2 x}{\cos x} \right) f(x)$.

Exercice 3. 2. $f(1) = 0$. **3.** Non, demi-tangente verticale.

Exercice 4. $f'(a)$.

Exercice 5. La droite d'équation $y = -4x - 4$ est tangente à la courbe de la fonction carré (resp. inverse) en -2 (resp. $-\frac{1}{2}$).

Exercice 8. 1. L'unique solution est la fonction nulle.

Exercice 9. 1. $f : x \mapsto (x^2 + 3x - 1)e^x \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
 $f^{(n)} : x \mapsto (x^2 + (2n + 3)x + n^2 + 2n - 1)e^x$.

2. $f : x \mapsto e^x \cos x \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} : x \mapsto 2^{n/2} e^x \cos\left(x + n\frac{\pi}{4}\right)$.

3. $f : x \mapsto \frac{1+x}{1-x} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \setminus \{1\}, \mathbb{R})$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)} : x \mapsto \frac{2n!}{(1-x)^{n+1}}$.

4. $f : x \mapsto \frac{1}{(x-a)(x-b)} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \setminus \{a, b\}, \mathbb{R})$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

si $a \neq b$, $f^{(n)} : x \mapsto \frac{(-1)^n n!}{a-b} \left(\frac{1}{(x-a)^{n+1}} - \frac{1}{(x-b)^{n+1}} \right)$

si $a = b$, $f^{(n)} : x \mapsto \frac{(-1)^n (n+1)!}{(x-a)^{n+2}}$.

5. $\text{Arctan} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$f^{(n+1)} : x \mapsto \frac{(-1)^n n!}{2i} \left[\frac{(x+i)^{n+1} - (x-i)^{n+1}}{(x^2+1)^{n+1}} \right]$.

6. $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 2x \cos a + 1} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \setminus \{e^{\pm ia}\}, \mathbb{R})$ et se ramener à **4**.

Exercice 11. 1. $x \mapsto n! \left(\sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{n}{p}^2 (1-x)^{n-p} x^p \right)$. **2.** $\binom{2n}{n}$.

Exercice 19. 3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^p - 1}{x^q - 1} = \frac{p}{q}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$.

Exercice 23. En n points.

Exercice 37. 1. $f' : x \mapsto \begin{cases} \frac{e^{-1/\sqrt{x}}}{2x^{3/2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ et f est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ .

3. $f' : x \mapsto \begin{cases} \frac{\ln|x| - 1}{(\ln|x|)^2} \cos \frac{1}{x} + \frac{1}{x \ln|x|} \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ et f' n'est pas continue en 0.