18 Corps des fractions rationnelles

Cahier de calcul : fiches 26 et 19. **Banque CCINP :** $\varnothing$.

Généralités

Exercice 1 ●○○○ Montrer que si F_1 et F_2 sont deux fractions rationnelles, la partie entière de $F_1 + F_2$ est la somme des parties entières de F_1 et F_2.

Exercice 2 ●○○○ Soit F et G deux fractions rationnelles de $\mathbb{K}(X)$ prenant la même valeur en une infinité de points de $\mathbb{K}$. Montrer que $F = G$.

Exercice 3 ●●○○ 💡 ☑ **Dérivée d'une fraction rationnelle** Soit $F \in \mathbb{K}(X)$.

1. Montrer que la fraction rationnelle $\dfrac{P'Q - PQ'}{Q^2}$ est indépendante du choix du représentant (P, Q) de F.

On appelle cette fraction rationnelle la *dérivée de* F et on la note F'.

2. Montrer que la dérivée d'un polynôme coïncide avec sa dérivée en tant que fraction rationnelle.
3. Pour tous $F, G \in \mathbb{K}(X)$, montrer que

$$(F+G)' = F' + G', \quad (FG)' = F'G + FG' \quad \text{et} \quad \left(\frac{F}{G}\right)' = \frac{F'G - FG'}{G^2}, \text{ si } G \neq 0.$$

4. *Application.* Déterminer, pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} k z^k$.

Exercice 4 ●●○○

1. Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ de degré strictement négatif. Montrer que $\deg F' \leqslant -2$.
2. En déduire que la fraction $\dfrac{1}{X}$ n'a pas de primitive dans $\mathbb{C}(X)$.

Décomposition en éléments simples et applications

Exercice 5 ●○○○ Soit $m, n \in \mathbb{N}$. Calculer, après avoir remarqué que $X = (X-1) + 1$, la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de $\dfrac{X^m}{(X-1)^n}$.

Exercice 6 ●○○○ ☑

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ les fractions rationnelles suivantes.

1. $\dfrac{10X^3}{(X^2+1)(X^2-4)}$.
2. $\dfrac{X^4+1}{X^4+X^2+1}$.
3. $\dfrac{X^3-1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$.
4. $\dfrac{X^2}{(X^2+X+1)^2}$.
5. $\dfrac{(X^2+4)^2}{(X^2+1)(X^2-2)^2}$.

Exercice 7 ●●○○ ☑ Soit $n \in \mathbb{N}$. Décomposer en éléments simples la fraction

$$F = \frac{1}{X} + \frac{1!}{X(X+1)} + \cdots + \frac{n!}{X(X+1)\dots(X+n)}.$$

Exercice 8 ●●●○ ☑ Calculer, pour tout $n \geqslant 2$, la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ de $\dfrac{1}{(X-1)(X^n-1)}$.

Exercice 9 ●●○○ ☑ **Théorème de Gauss-Lucas**

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul. Rappeler la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus (1)} \frac{1}{1-\omega}$.
3. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant de racines distinctes $z_1, \dots, z_r$ dans $\mathbb{C}$.
   a. Montrer que toute racine de P' peut être écrite $\lambda_1 z_1 + \ldots + \lambda_n z_n$ pour certains $\lambda_1, \dots, \lambda_r \geqslant 0$ pour lesquels $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$
   b. Interpréter géométriquement ce résultat (théorème de Gauss-Lucas).
   c. *Application.* Soit P un polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$, Δ une droite du plan complexe, ainsi que H_1 et H_2 les deux demi-plans stricts délimités par Δ. Si P' a une racine dans H_1, montrer alors que $P[H_1] = \mathbb{C}$.

Exercice 10 ●●○○

Réduire sous la forme $\dfrac{P(X)}{Q(X)}$ la fraction $\displaystyle\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\frac{\omega^2}{X-\omega}$, où $n\geqslant 2$.

Exercice 11 ●●○○ **Mines-Ponts MP 2022**

Soit $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$ et $P=\displaystyle\prod_{i=1}^n(X-a_i)$. Calculer, sous réserve d'existence, $\displaystyle\sum_{i=1}^n\frac{1}{P'(a_i)}$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^n\frac{1}{a_iP'(a_i)}$.

Exercice 12 ●●○○ **Mines-Ponts MP 2017**

Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. Montrer que si les racines de P sont réelles et simples alors le polynôme P'^2-PP'' n'a pas de racines réelles.

Exercice 13 ●●●○

Déterminer les polynômes $P\in\mathbb{C}[X]$ tels que $P[\mathbb{U}]\subset\mathbb{U}$.

Exercice 14 ●○○○

Simplifier $\displaystyle\sum_{k=1}^n\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 15 ●●○○

Soit $a,b,c\in\mathbb{C}$. Donner une expression simple de

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)(b+c-a)}+\frac{b^2}{(b-a)(b-c)(c+a-b)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)(a+b-c)}.$$

Exercice 16 ●●●○

Soit $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ deux familles de nombres complexes distincts. Résoudre le système linéaire suivant

$$(\mathcal{S}):\left\{\begin{array}{l}\dfrac{x_1}{a_1+\alpha_1}+\dfrac{x_2}{a_2+\alpha_1}+\cdots+\dfrac{x_n}{a_n+\alpha_1}=1\\ \dfrac{x_1}{a_1+\alpha_2}+\dfrac{x_2}{a_2+\alpha_2}+\cdots+\dfrac{x_n}{a_n+\alpha_2}=1\\ \qquad\vdots\\ \dfrac{x_1}{a_1+\alpha_n}+\dfrac{x_2}{a_2+\alpha_n}+\cdots+\dfrac{x_n}{a_n+\alpha_n}=1.\end{array}\right.$$

Exercice 17 ●●○○

Calculer une primitive de la fonction $x\longmapsto\dfrac{x\ln x}{(x^2+1)^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 18 ●●○○

Soit a,b et c trois nombres complexes et F la fraction

$$\frac{aX^2+bX+c}{(X-1)^2(X-2)^2}.$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour que F admette une primitive rationnelle.

Exercice 19 ●●○○

Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t\,\mathrm{d}t}{t^4+1}$.
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t\,\mathrm{d}t}{(t+1)^2(2t+1)}$.
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+4)(t+2)^2}$.
4. $\displaystyle\int_0^{1}\frac{t^4\,\mathrm{d}t}{t^2+2t+5}$.
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)(t+1)(t+2)}$.
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^3+1}$.
7. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2(t^2-2t+2)}$.
8. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2(t+1)}$.

Exercice 20 ●●○○

Calculer les intégrales suivantes, en commençant par y effectuer le changement de variable proposé.

1. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{x}\frac{\mathrm{d}t}{\sin t}$ en posant $u=\cos t$, où $x\in]0,\pi[$.
2. $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{4-\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$ en posant $u=\cos t$.
3. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\mathrm{d}t}{\cos^3 t}$ en posant $u=\sin t$.

Indications

Exercice 3. 4. Exprimer la somme à l'aide de la dérivée du polynôme $1+X+\ldots+X^n$.

Exercice 11. Décomposer en éléments simples $1/P$ et X/P (attention à la partie entière !).

Exercice 12. Considérer $\dfrac{P'}{P}$.

Exercice 13. Commencer par montrer qu'un tel polynôme vérifie $X^nP(X)\overline{P}(1/X)=X^n$.

Exercice 15. Considérer $\dfrac{X^2}{(X-a)(X-b)(X-c)}$.

Exercice 16. Considérer la fraction rationnelle $F=\dfrac{x_1}{a_1+X}+\ldots+\dfrac{x_n}{a_n+X}-1$ et exprimer à quelle condition $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est solution du système en lien avec les racines de F.

Éléments de réponses

Exercice 3. 4. $\dfrac{z}{(1-z)^2}$

Exercice 7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}\frac{(-1)^k}{X+k}$.

Exercice 6. 1. $\dfrac{1}{X-i}+\dfrac{1}{X+i}+\dfrac{4}{X-2}+\dfrac{4}{X+2}$. **3.** $1+\dfrac{13}{X-3}-\dfrac{7}{X-2}$.

2. $1+\dfrac{3+i\sqrt{3}}{12}\left[\dfrac{1}{X-j}-\dfrac{1}{X+j}\right]+\dfrac{3-i\sqrt{3}}{12}\left[\dfrac{1}{X-\overline{j}}-\dfrac{1}{X+\overline{j}}\right]$.

4. $\dfrac{2+4j}{9(X-\overline{j})}-\dfrac{j}{3(X-\overline{j})^2}-\dfrac{2+4j}{9(X-j)}+\dfrac{1+j}{3(X-j)^2}$.

5. $-\dfrac{i}{2(X-i)}+\dfrac{i}{2(X+i)}-\dfrac{3\sqrt{2}}{4(X-\sqrt{2})}+\dfrac{3}{2(X-\sqrt{2})^2}+\dfrac{3\sqrt{2}}{4(X+\sqrt{2})}+\dfrac{3}{2(X+\sqrt{2})^2}$.

Exercice 7. $F=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha_k}{X+k}$ avec $\alpha_k=(-1)^k\dbinom{n+1}{k+1}$.

Exercice 8. $\dfrac{1-n}{2n(X-1)}+\dfrac{1}{n(X-1)^2}+\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n\setminus\{1\}}\frac{\omega}{(\omega-1)(X-\omega)}$.

Exercice 9. 2. $\frac{n-1}{2}$.

Exercice 10. $\dfrac{nX}{X^n-1}$.

Exercice 14. $\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2(n+1)(n+2)}$.

Exercice 11. Si les a_i sont distincts et non nuls, alors

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_iP'(a_i)}=-\frac{1}{P(0)}\quad\text{et}\quad\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{P'(a_i)}=\begin{cases}1&\text{si } n=1\\0&\text{sinon.}\end{cases}$$

Exercice 13. Ce sont les λX^n avec $\lambda\in\mathbb{U}$ et $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 15. $\dfrac{(a+b+c)^2}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$.

Exercice 16. $x_i=(-1)^{n+1}\dfrac{\prod_{j=1}^{n}(\alpha_j+a_i)}{\prod_{j\neq i}(a_j-a_i)}$.

Exercice 18. $4a+3b+2c=0$.

Exercice 17. $x\longmapsto\dfrac{\ln x}{2}-\dfrac{1}{4}\ln(x^2+1)-\dfrac{\ln x}{2(x^2+1)}$.

Exercice 19. 1. $\dfrac{\pi}{4}$. **2.** $1-\ln 2$. **3.** $\dfrac{1}{16}$. **4.** $\dfrac{7}{2}\left(\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)+6\ln\dfrac{8}{5}-\dfrac{5}{3}$. **5.** $\dfrac{3\pi-8\ln 2}{20}$.
6. $\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. **7.** $\dfrac{9\pi}{100}+\dfrac{2\ln 2}{25}+\dfrac{1}{5}$. **8.** $\dfrac{\pi-1}{4}$.

Exercice 20. 1. $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)=\ln\left(\tan\dfrac{x}{2}\right)$. **2.** $\dfrac{\ln 3}{2}$. **3.** $\sqrt{2}+\dfrac{\ln(3+2\sqrt{2})}{2}$.