18 Corps des fractions rationnelles

Cahier de calcul : fiches 26 et 19. **Banque CCINP :** $\varnothing$.

Généralités

Exercice 1 ●○○○ Montrer que si F_1 et F_2 sont deux fractions rationnelles, la partie entière de $F_1 + F_2$ est la somme des parties entières de F_1 et F_2.

Exercice 2 ●●○○ **Dérivée d'une fraction rationnelle** Soit $F \in \mathbb{K}(X)$.

1. Montrer que la fraction rationnelle $\dfrac{P'Q - PQ'}{Q^2}$ est indépendante du choix du représentant (P, Q) de F.

On appelle cette fraction rationnelle la *dérivée de* F et on la note F'.

2. Montrer que la dérivée d'un polynôme coïncide avec sa dérivée en tant que fraction rationnelle.
3. Pour tous $F, G \in \mathbb{K}(X)$, montrer que
$$(F+G)' = F' + G', \quad (FG)' = F'G + FG' \quad \text{et} \quad \left(\frac{F}{G}\right)' = \frac{F'G - FG'}{G^2}, \text{ si } G \neq 0.$$
4. *Application.* Déterminer, pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} kz^k$.

Exercice 3 ●●○○

1. Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ de degré strictement négatif. Montrer que $\deg F' \leqslant -2$.
2. En déduire que la fraction $\dfrac{1}{X}$ n'a pas de primitive dans $\mathbb{C}(X)$.

Exercice 4 ●●●● **ENS Rennes MP 2022**

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\{x \in \mathbb{N} \mid P(x) \in \mathbb{Q}\}$ soit infini. Montrer que $P \in \mathbb{Q}[X]$.
2. Soit $P, Q \in \mathbb{C}[X] \backslash \{0\}$ avec $\deg P \leqslant \deg Q$, $F = P/Q$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $Q(\alpha) \neq 0$. Montrer qu'il existe $P_1 \in \mathbb{C}[X]$ de degré strictement inférieur à celui de Q tel que
$$\frac{F - F(\alpha)}{X - \alpha} = \frac{P_1}{Q}.$$
3. Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ telle que $\{x \in \mathbb{N} \mid F(x) \in \mathbb{Q}\}$ soit infini. Montrer que $F \in \mathbb{Q}(X)$.

Décomposition en éléments simples et applications

Exercice 5 ●○○○ Soient $m, n \in \mathbb{N}$. Calculer, après avoir remarqué que $X = (X-1) + 1$, la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de $\dfrac{X^m}{(X-1)^n}$.

Exercice 6 ●○○○ Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ les fractions suivantes

1. $\dfrac{10X^3}{(X^2+1)(X^2-4)}$.
2. $\dfrac{X^4+1}{X^4+X^2+1}$.
3. $\dfrac{X^3-1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$.
4. $\dfrac{X^2}{\left(X^2+X+1\right)^2}$.
5. $\dfrac{\left(X^2+4\right)^2}{(X^2+1)(X^2-2)^2}$.

Exercice 7 ●●○○ Soit $n \in \mathbb{N}$. Décomposer en éléments simples la fraction suivante
$$F = \frac{1}{X} + \frac{1!}{X(X+1)} + \cdots + \frac{n!}{X(X+1)\dots(X+n)}.$$

Exercice 8 ●●●○ Calculer, pour tout $n \geqslant 2$, la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ de $\dfrac{1}{(X-1)(X^n-1)}$.

Exercice 9 ●●○○ **Théorème de Gauss-Lucas**

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul. Rappeler la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$.
2. En déduire la valeur de $\sum\limits_{\omega \in \mathbb{U}_n \backslash (1)} \dfrac{1}{1-\omega}$.
3. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant de racines distinctes $z_1, \dots, z_r$ dans $\mathbb{C}$.
   a. Montrer que toute racine de P' peut être écrite $\lambda_1 z_1 + \ldots + \lambda_n z_n$ pour certains $\lambda_1, \dots, \lambda_r \geqslant 0$ pour lesquels $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$
   b. Interpréter géométriquement ce résultat (théorème de Gauss-Lucas).

Exercice 10 ●●○○

Réduire sous la forme $\dfrac{P(X)}{Q(X)}$ la fraction $\sum\limits_{\omega \in \mathbb{U}_n} \dfrac{\omega^2}{X-\omega}$, où $n \geqslant 2$.

Exercice 11 ●●○○ **Mines-Ponts MP 2022** Soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et $P = \prod_{i=1}^{n}(X - a_i)$. Calculer, sous réserve d'existence, $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P'(a_i)}$ et $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i P'(a_i)}$.

Exercice 12 ●●○○
Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. Montrer que si les racines de P sont réelles et simples alors le polynôme $P'^2 - PP''$ n'a pas de racines réelles.

On pourra considérer $\frac{P'}{P}$.

Exercice 13 ●●●○ Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

Exercice 14 ●○○○ Simplifier $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 15 ●●○○ Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$. Donner une expression simple de

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)(b+c-a)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)(c+a-b)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)(a+b-c)}.$$

Exercice 16 ●●●○ Soient $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ deux familles de nombres complexes distincts. Résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{a_1+\alpha_1} + \dfrac{x_2}{a_2+\alpha_1} + \cdots + \dfrac{x_n}{a_n+\alpha_1} = 1 \\ \dfrac{x_1}{a_1+\alpha_2} + \dfrac{x_2}{a_2+\alpha_2} + \cdots + \dfrac{x_n}{a_n+\alpha_2} = 1 \\ \qquad\qquad\vdots \\ \dfrac{x_1}{a_1+\alpha_n} + \dfrac{x_2}{a_2+\alpha_n} + \cdots + \dfrac{x_n}{a_n+\alpha_n} = 1 \end{cases}$$

Exercice 17 ●●○○ Soient a, b et c trois nombres complexes et F la fraction

$$\frac{aX^2 + bX + c}{(X-1)^2(X-2)^2}.$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour que F admette une primitive rationnelle.

Exercice 18 ●●○○
Calculer une primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 19 ●●○○ Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{d}t}{t^4+1}$.
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{d}t}{(t+1)^2(2t+1)}$.
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+4)(t+2)^2}$.
4. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{t^4\,\mathrm{d}t}{t^2+2t+5}$.
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)(t+1)(t+2)}$.
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3+1}$.
7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2(t^2-2t+2)}$.
8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2(t+1)}$.

Exercice 20 ●●○○ Calculer les intégrales suivantes, en commençant par y effectuer le changement de variable proposé,

1. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\sin t}$ en posant $u = \cos t$, où $x \in]0, \pi[$.
2. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin t\,\mathrm{d}t}{4 - \cos^2 t}$ en posant $u = \cos t$.
3. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}t}{\cos^3 t}$ en posant $u = \sin t$.

Exercice 21 ●●●○ **Mines-Ponts MP 2022**

1. Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
2. Calculer une primitive de $x \longmapsto \frac{\sin x}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right)}$ sur $\left]\frac{\pi}{12}, \frac{2\pi}{3}\right[$.

Indications

Exercice 2. 4. Exprimer la somme à l'aide de la dérivée du polynôme $1 + X + \ldots + X^n$.

Exercice 4. 1. Penser aux polynômes de Lagrange.

Exercice 11. Décomposer en éléments simples $1/P$ et X/P (attention à la partie entière !).

Exercice 13. Montrer qu'un tel polynôme vérifie $P(X)\overline{P}(1/X) = 1$.

Exercice 15. Considérer $\dfrac{X^2}{(X-a)(X-b)(X-c)}$.

Exercice 21. 2. On peut procéder au changement de variable $t = \tan(x/2)$, mais les calculs deviennent diaboliques !

Éléments de réponses

Exercice 2. 4. $\dfrac{z}{(1-z)^2}$

Exercice 7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} \frac{(-1)^k}{X+k}$.

Exercice 6. 1. $\dfrac{1}{X-i} + \dfrac{1}{X+i} + \dfrac{4}{X-2} + \dfrac{4}{X+2}$. **3.** $1 + \dfrac{13}{X-3} - \dfrac{7}{X-2}$.

2. $1 + \dfrac{3+i\sqrt{3}}{12}\left[\dfrac{1}{X-j} - \dfrac{1}{X+j}\right] + \dfrac{3-i\sqrt{3}}{12}\left[\dfrac{1}{X-\overline{j}} - \dfrac{1}{X+\overline{j}}\right]$.

4. $\dfrac{2+4j}{9(X-\overline{j})} - \dfrac{j}{3(X-\overline{j})^2} - \dfrac{2+4j}{9(X-j)} + \dfrac{1+j}{3(X-j)^2}$.

5. $-\dfrac{i}{2(X-i)} + \dfrac{i}{2(X+i)} - \dfrac{3\sqrt{2}}{4(X-\sqrt{2})} + \dfrac{3}{2(X-\sqrt{2})^2} + \dfrac{3\sqrt{2}}{4(X+\sqrt{2})} + \dfrac{3}{2(X+\sqrt{2})^2}$.

Exercice 7. $F = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{X+k}$ avec $\alpha_k = (-1)^k \dbinom{n+1}{k+1}$.

Exercice 8. $\dfrac{1-n}{2n}\dfrac{1}{X-1} + \dfrac{1}{n(X-1)^2} + \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} \frac{\omega}{\omega - 1}\frac{1}{X-\omega}$.

Exercice 10. $\dfrac{nX}{X^n - 1}$. **Exercice 14.** $\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2(n+1)(n+2)}$.

Exercice 11. Si les a_i sont distincts et non nuls, alors

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i P'(a_i)} = -\frac{1}{P(0)} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P'(a_i)} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 13. Ce sont les λX^n avec $\lambda \in \mathbb{U}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 15. $\dfrac{(a+b+c)^2}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$.

Exercice 16. $x_i = (-1)^{n+1} \prod_{j \neq i} \dfrac{a_i + \alpha_j}{a_j - a_i}$. **Exercice 17.** $4a + 3b + 2c = 0$.

Exercice 18. $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{2} - \dfrac{1}{4}\ln(x^2+1) - \dfrac{\ln x}{2(x^2+1)}$.

Exercice 19. 1. $\dfrac{\pi}{4}$. **2.** $1 - \ln 2$. **3.** $\dfrac{1}{16}$. **4.** $\dfrac{7}{2}\left(\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) + 6\ln\dfrac{8}{5} - \dfrac{5}{3}$. **5.** $\dfrac{3\pi - 8\ln 2}{20}$.

6. $\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. **7.** $\dfrac{9\pi}{100} + \dfrac{2\ln 2}{25} + \dfrac{1}{5}$. **8.** $\dfrac{\pi - 1}{4}$.

Exercice 20. 1. ... **2.** $\dfrac{\ln 3}{2}$. **3.** $\sqrt{2} + \dfrac{\ln(3+2\sqrt{2})}{2}$.

Exercice 21. 1. $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

2. ...