17 Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Cahier de calcul : fiche 25. **Banque CCINP :** exercices 33 et 38.

Exercice 1 ●○○○ ☑ Répondre par Vrai ou Faux en justifiant.

1. Si $P \in \mathbb{C}[X]$ est de degré impair, alors P possède au moins une racine réelle.
2. Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{C}_n[X]$, alors P possède n racines distinctes.
3. Le polynôme $(X+i)^2(X-4)\left(X+\sqrt{2}\right)^2$ est de degré 5 et possède trois racines distinctes.
4. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P\left(\cos \dfrac{n\pi}{2}\right) = 0$. Alors $P = 0$.
5. Si $P'(0) = 0$, alors 0 est racine multiple de P.

Division euclidienne

Exercice 2 ●○○○ ☑

Vérifier que $X^5 - 2X^4 + 6X^3 - 4X^2 + 3X + 1$ est divisible par $X^2 - X + 1$.

Exercice 3 ●○○○ ☑ À quelle condition nécessaire et suffisante sur $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ le polynôme $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$ est-il divisible par $X^2 + 2$?

Exercice 4 ●●○○ ☑

Calculer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^4$, pour tout $n \geqslant 4$.

Exercice 5 ●●○○ ☑ Calculer le reste de la division euclidienne

1. de $X^n(X+1)^2$ par $(X-1)(X-2)$, avec $n \in \mathbb{N}$.
2. de X^{100} par $(X-1)^3(X+1)$.
3. de X^{2n} par $\left(X^2+1\right)^2$, avec $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6 ●●○○ ☑ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que le polynôme

$$P = (X-3)^{2n} + (X-2)^n - 1$$

est divisible par $(X-3)(X-2)$ et former le quotient.

Exercice 7 ●●○○ Soit $k, n \in \mathbb{N}$, avec n non nul.

Si r désigne le reste de la division euclidienne de k par n, montrer que X^r est le reste de la division euclidienne de X^k par $X^n - 1$.

Exercice 8 ●●○○ ☑ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

1. On suppose que le reste de la division euclidienne de P par $X-1$ vaut 3, que son reste par $X-2$ vaut 7 et que son reste par $X-3$ vaut 13. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)(X-2)(X-3)$.
2. On suppose que le reste de la division euclidienne de P par X^2+4 vaut $X+1$ et que son reste par $X-3$ vaut 14. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $\left(X^2+4\right)(X-3)$.

Exercice 9 ●○○○

Soit $n \geqslant 2$ un entier et J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^k par $X^2 - nX$.
2. En déduire le calcul des puissances de la matrice J.

Racines et multiplicités

Exercice 10 ●○○○ ☑ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, quelle est la multiplicité de 1 dans

$$nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1\,?$$

Exercice 11 ●○○○ ☑ Montrer que $X^2 + X + 1$ divise $X^{311} + X^{82} + X^{15}$.

Exercice 12 ●○○○ ☑

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(X-1)^3$ divise $nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$.

Exercice 13 ●○○○ ☑ Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $P(X^n)$ est divisible par $X-1$, alors il l'est aussi par $X^n - 1$.

Exercice 14 ●●○○ ☑

Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ le polynôme $X^{2n} + X^n + 1$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?

Exercice 15 ●●○○ Montrer que, pour tous $n \geqslant 2$ et $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\sin\theta\, X^n - \sin(n\theta)X + \sin((n-1)\theta)$$

est divisible par $X^2 - 2\cos\theta\, X + 1$.

Exercice 16 ●●○○ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que le polynôme $1 + X + X^n \in \mathbb{R}[X]$ n'a que des racines simples.

Exercice 17 ●●○○ ENS SR MP 2022
Soit a, b deux réels, et $n \geqslant 3$ un entier impair.
Étudier, en fonction de n, a et b, le nombre de racines réelles de $X^n + aX + b$.

Nombre maximal de racines

Exercice 18 ●○○○ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant et $y \in \mathbb{R}$.
Que peut-on dire du nombre de solutions de l'équation $y = P(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$?

Exercice 19 ●○○○ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré n tel que, pour tout $k \in [\![0\,,n]\!]$, $P(k) = k^n$.

Exercice 20 ●●○○
Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

1. $P(n) = n^2$. **2.** $P(n) = n^2 + (-1)^n$.

Exercice 21 ●●○○

1. Pourquoi n'existe-t-il pas de polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

a. pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $P(x) = \sqrt{x}$? **b.** pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \sin x$?
c. pour tout $x \in [0\,,2\pi]$, $P(x) = \sin x$? **d.** pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \mathrm{e}^x$?

2. Pourquoi n'existe-t-il pas de polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que

a. pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = \overline{z}$? **b.** pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = |z|^2$?

Exercice 22 ●●●○ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n.

1. On suppose que P est unitaire et que, pour tout $k \in [\![1\,,n+1]\!]$, $P(k) = \dfrac{1}{k^2}$.
Calculer $P(n+2)$.

2. On suppose que $P(k) = \dfrac{k}{k+1}$, pour tout $k \in [\![0\,,n]\!]$. Calculer $P(n+1)$.

Exercice 23 ●●●○

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, on suppose que $P\left(X^2\right) = P(X-1)P(X+1)$.
Montrer que, si a est une racine de P, alors on peut trouver une racine b de P telles que $|b| > |a|$. En déduire P.

2. Quels sont les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P\left(X^2\right) = P(X-1)P(X+1)$?

Exercice 24 ●●●○ Mines-Ponts MP 2022 Soit P et Q deux polynômes non constants de $\mathbb{C}[X]$, ainsi que a et b deux nombres complexes distincts.
On suppose que $P^{-1}[\{a\}] = Q^{-1}[\{a\}]$ et $P^{-1}[\{b\}] = Q^{-1}[\{b\}]$. Montrer que $P = Q$.

Polynômes scindés et relations coefficients/racines

Exercice 25 ●●○○ Trouver les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $X^4 + 12X - 5$ sachant qu'il possède deux racines dont la somme est 2.

Exercice 26 ●●○○
Soit x, y, z les trois racines complexes comptées avec multiplicité de $X^3 - 2X + 5$. Déterminer l'unique polynôme unitaire de degré 3 dont les racines sont x^2, y^2 et z^2.

Exercice 27 ●○○○ Soient $p, q \in \mathbb{C}$. On pose $P = X^3 + pX + q$ et on note x, y et z les trois racines complexes de P comptées avec multiplicité.

1. Simplifier en fonction de p et q les quantités suivantes

a. $x^2 + y^2 + z^2$. **b.** $x^3 + y^3 + z^3$. **c.** $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$. **d.** $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{z^2}$.

Les racines x, y et z étant supposées non nulles pour les deux dernières questions.

2. **a.** Au moyen des relations coefficients/racines, prouver l'égalité

$$P'(x)P'(y)P'(z) = 4p^3 + 27q^2.$$

b. À quelle condition nécessaire et suffisante sur p et q le polynôme P possède-t-il une racine multiple ?

Exercice 28 ●●○○

1. On note $(\star)$ le système $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=21 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \end{cases}$ d'inconnues $(x,y,z) \in (\mathbb{C}^*)^3$.

   Soit $(a,b,c) \in (\mathbb{C}^*)^3$, on pose $P=(X-a)(X-b)(X-c)$.
   - **a.** Si (a,b,c) est solution du système $(\star)$, déterminer P explicitement.
   - **b.** Résoudre $(\star)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ les systèmes $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=3 \\ xyz=2 \end{cases}$ et $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=0 \\ x^3+y^3+z^3=3. \end{cases}$

Exercice 29 ●●●○ Oral X

Donner une condition nécessaire et suffisante sur les nombres complexes a, b et c pour que les racines de X^4+aX^2+bX+c forment dans le plan complexe

1. un parallélogramme.
2. un rectangle.

Exercice 30 ●●●○ Mines-Ponts MP 2022 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini de polynômes P unitaires, à coefficients entiers, de degré n et tels que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z)=0 \implies |z|=1.$$

Exercice 31 ●●○○ Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $P=(X+1)^n-\mathrm{e}^{2in\theta}$.

1. Déterminer la forme scindée de P sur $\mathbb{C}$.
2. Montrer que $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\theta+\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{\sin(n\theta)}{2^{n-1}}$.
3. En déduire que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}$.

Exercice 32 ●●●○ ENS PLSR MP 2022

1. Montrer qu'il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que
$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \sin(4n\theta)=\cos(\theta)\sin(\theta)P_n\left(\cos^2\theta\right).$$
2. Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{2n-1} \cos\left(\frac{k\pi}{4n}\right)$, puis $\displaystyle\prod_{k=1}^{2n} \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)$.

Polynômes d'interpolation de Lagrange

Exercice 33 ●○○○ Banque d'exercices CCINP 2025 (87)

Soient $n+1$ réels $a_0, a_1, \cdots, a_n$ deux à deux distincts.

1. Montrer que si $b_0, b_1, \cdots, b_n$ sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(a_i)=b_i$, pour tout $i \in [\![0\,,n]\!]$.
2. Soit $k \in [\![0\,,n]\!]$. Expliciter ce polynôme P, que l'on notera L_k, lorsque
$$\forall i \in [\![0\,,n]\!], \quad b_i=\delta_{i,k}.$$
3. Prouver que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p$, pour tout $p \in [\![0\,,n]\!]$.

Exercice 34 ●○○○ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ distincts et $L_0, \ldots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés. Simplifier $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} L_i$ et $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} x_i L_i$.

Exercice 35 ●●○○ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des réels $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ tels que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{i=0}^{n} \lambda_i P\left(\frac{i}{n}\right).$$

Exercice 36 ●●○○

On note $L_1, \ldots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés aux abscisses $1, \ldots, n$.

1. Pour $k \in [\![1\,,n]\!]$, exprimer le coefficient dominant de L_k au moyen de factorielles.
2. Exprimer de deux manières l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à $n-1$ pour lequel, pour tout $k \in [\![1\,,n]\!]$, $P(k)=k^{n-1}$.
3. En déduire une simplification de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^n$.

Exercice 37 ●●●○ Surjection polynomiale de $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{Q}$

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que P induise une surjection de $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{Q}$.

Factorisation irréductible sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Exercice 38 ●○○○ **Banque d'exercices CCINP 2025 (85)**

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$. En utilisant la formule de Taylor, montrer que a est une racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si

$$P^{(r)}(a) \neq 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![0\,, r-1]\!], \quad P^{(k)}(a) = 0.$$

2. Déterminer les réels a et b tels que 1 soit racine double du polynôme

$$P = X^5 + aX^2 + bX$$

et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 39 ●○○○ Soit $P = X^5 + 4X^4 + 6X^3 + 5X^2 - 4X - 12$.

1. Vérifier que -2 et 1 sont racines de P, puis déterminer leur multiplicités respectives.
2. En déduire la factorisation irréductible de P sur $\mathbb{R}$.

Exercice 40 ●●○○ On pose $P = (X+1)^7 - X^7 - 1$.

1. Déterminer le degré de P.
2. Trouver deux racines évidentes entières de P, puis montrer que j est racine de P.
3. En déduire la factorisation irréductible de P sur $\mathbb{R}$.

Exercice 41 ●○○○ **Mines-Ponts MP 2022**

Décomposer $X^4 + 1$ en produit d'irréductible sur $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$.

Exercice 42 ●●○○ Déterminer la factorisation irréductible sur $\mathbb{R}$ de

1. **a.** $X^4 - 4$. **b.** $X^6 + 27$. **c.** $X^4 + X^2 + 1$. **d.** $X^8 + X^4 + 1$.
2. **a.** $X^{2n+1} + 1$, où $n \in \mathbb{N}$. **b.** $X^{2n} - 1$, où $n \in \mathbb{N}^*$. **c.** $X^{2n} + 1$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 43 ●●○○

1. Soit $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, $P = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ et $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ avec $p \wedge q = 1$.
   - **a.** Montrer que si $r = p/q$ est une racine de P, alors $q \mid a_n$ et $p \mid a_0$.
   - **b.** Que peut-on conclure si $a_n = 1$?
   - **c.** Montrer que, si p/q est une racine de P alors, pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $p - mq \mid P(m)$.
2. Montrer que le polynôme $X^3 - X^2 + 2X + 5$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.
3. Déterminer la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ de $3X^3 - 2X^2 - 2X - 5$.
4. Donner une nouvelle démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

Exercice 44 ●●●○ **Théorème de Niven (ENS Lyon MP 2022)**

1. Montrer que $\cos(\pi/8)$ n'est pas rationnel.
2. Montrer qu'un entier algébrique† rationnel est entier.
3. Déterminer l'ensemble des rationnels r tels que $\cos(r\pi)$ est rationnel.

Exercice 45 ●●●○ **ENS Lyon MP 2022**

Soit p un nombre premier, dont on note $p = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_0}^{10}$ l'écriture décimale.

Montrer que le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 46 ●●○○

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant tel que $P(X^2) = P(X)P(X-1)$.
   - **a.** Montrer que si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de P, il en va de même de α^2. En déduire que $\alpha = 0$ ou $|\alpha| = 1$.
   - **b.** Montrer que 0 n'est pas racine de P.
   - **c.** Montrer que si α est une racine complexe de P, alors $|\alpha + 1| = 1$.
   - **d.** Déduire de ce qui précède quelles sont les racines de P ainsi que sa forme.
2. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)P(X-1)$.

Exercice 47 ●●●○ **Mines-Ponts MP 2022**

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)P(X-1)$.

†. Un *entier algébrique* est un nombre complexe racine d'un polynôme unitaire à coefficients entiers.

Exercice 48 ●●●○ — Théorème des deux carrés dans $\mathbb{R}[X]$

Considérons l'ensemble

$$\Sigma = \left\{P \in \mathbb{R}[X] \,\middle|\, \exists A, B \in \mathbb{R}[X], \quad P = A^2 + B^2\right\}.$$

On souhaite montrer que Σ est exactement l'ensemble des polynômes dont les fonctions polynomiales associées sont positives sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que Σ est stable par produit.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) \geqslant 0$.
   - **a.** Montrer que si P est non nul, toute racine réelle de P est de multiplicité paire.
   - **b.** Conclure.

Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Exercice 49 ●○○○ — Calculer le PGCD des deux polynômes

$$X^5 - 4X^4 + 6X^3 - 6X^2 + 5X - 2 \quad \text{et} \quad X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1.$$

Exercice 50 ●●○○ — Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $(X^m - 1) \wedge (X^n - 1)$.

Exercice 51 ●●○○ — Montrer que deux polynômes $A, B \in \mathbb{K}[X]$ sont premiers entre eux si et seulement si $A + B$ et AB le sont.

Exercice 52 ●●○○

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que si P et P' sont premiers entre eux, alors P n'a pas de racine multiple dans $\mathbb{K}$. On peut donc savoir que P est à racines simples dans $\mathbb{K}$ sans connaître aucune racine de P.
2. Montrer que la réciproque est vraie si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, mais fausse si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Exercice 53 ●●○○ — Mines-Ponts MP 2022 Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ irréductible. Montrer que les racines complexes de P sont simples.

Exercice 54 ●●●○

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P' \mid P$.

Indications

Exercice 23. Montrer que $P - Q$ a strictement plus de racines que son degré.

Exercice 24. On pourra s'intéresser au nombre de racines de $P - c$ et $(P' - c)$, pour $c \in \{a, b\}$.

Exercice 29. **2.** Que dire des diagonales d'un rectangle ?

Exercice 30. Borner les coefficients d'un tel polynôme grâce aux formules de Viète.

Exercice 32. Procéder par analogie aux polynômes de Tchebychev et relier les cosinus du premier produit aux racines de P_n.

Exercice 37. Commencer par montrer que de tels polynômes sont à coefficients rationnels. Puis, pour un polynôme de degré $\geqslant 2$, on pourra se ramener à $\mathbb{Z}[X]$ et considérer par l'absurde un antécédent de $1/m$ avec m premier.

Exercice 43. **1.c** Considérer $P(X + m)$ ou raisonner modulo $p - qm$.
3. Si p/q est racine, quelles conditions a-t-on sur $p + q$ et $p - q$?

Exercice 44. **2.** Cf. exercice 43. **3.** On pourra commencer par montrer l'existence de $P_n \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire tel que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $P_n(2\cos\theta) = 2\cos(n\theta)$.

Exercice 47. Cf. exercice 46 !

Exercice 48. **2.b** Considérer la factorisation irréductible de P sur $\mathbb{R}$.

Exercice 50. On pourra déterminer le reste de la division euclidienne de $X^m - 1$ par $X^n - 1$ en fonction du reste de celle de m par n ou factoriser dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 54. Si $P = P'Q$, que peut-on dire du facteur Q ? On pourra ensuite obtenir une relation de récurrence entre les coefficients de P.

Éléments de réponses

Exercice 1. **1.** Faux ($P = X + i$). **2.** Faux ($P = X^n$). **3.** Vrai. **4.** Faux ($P = X^3 - X$). **5.** Faux ($P = X^2 + 1$).

Exercice 2. Le reste de la division euclidienne est nul.

Exercice 3. En procédant à la division euclidienne, $\lambda = 3$ et $\mu = 2$.

Exercice 4. On pourra remarquer que $X^n = ((X-1)+1)^n$.

Le reste est $\displaystyle\sum_{k=0}^{3}\binom{n}{k}(X-1)^k = aX^3 + bX^2 + cX + d$, avec $a = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$, $b = -\dfrac{n(n-1)(n-3)}{2}$, $c = \dfrac{n(n-2)(n-3)}{2}$ et $d = -\dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$.

Exercice 5. **1.** Le reste R est de la forme $aX + b$ et $\begin{cases} R(1) = a + b = 4 \\ R(2) = 2a + b = 9 \times 2^n, \end{cases}$

soit $a = 9 \times 2^n - 4$ et $b = 8 - 9 \times 2^n$.

2. Le reste R est de la forme $aX^3 + bX^2 + cX + d$ et $R(-1) = R(1) = 1$, $R'(1) = 100$ et $R''(1) = 9900$,

soit $\begin{cases} -a + b - c + d = 1 \\ a + b + c + d = 1 \\ 3a + 2b + c = 100 \\ 6a + 2b = 9900 \end{cases} \iff (a, b, c, d) = (2450, -2400, -2450, 2401).$

3. Méthode 1. $X^{2n} = \left(X^2 + 1 - 1\right)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\left(X^2+1\right)^k$. Ainsi le reste est $R = \binom{n}{1}(-1)^{n-1}\left(X^2+1\right) + \binom{n}{0}(-1)^n = (-1)^{n-1}\left[nX^2 + (n-1)\right]$.

Méthode 2. $\left(X^2+1\right)^2 = (X-i)^2(X+i)^2$, et on résout dans $\mathbb{R}$ le système

$$\begin{cases} R(i) = (-1)^n \\ R'(i) = 2n(-1)^{n+1}i \end{cases}$$

pour déterminer les coefficients du reste $R = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}[X]$.

Exercice 6. 2 et 3 sont racines du polynôme. Le quotient est $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-2}(3-X)^k + \sum_{k=0}^{n-2}(X-2)^k$.

Exercice 8. **1.** Le reste R est de la forme $aX^2 + bX + c$ et

$\begin{cases} R(1) = P(1) = 3 \\ R(2) = P(2) = 7 \\ R(3) = P(3) = 13 \end{cases} \iff (a, b, c) = (1, 1, 1).$

2. Le reste R est de la forme $aX^2 + bX + c$ et $R(3) = 9a + 3b + c = 14$. En outre, $R = a(X^2+4) + bX + c - 4a$, ainsi $bX + c - 4a = X + 1$. Soit le système

$\begin{cases} 9a + 3b + c = 14 \\ b = 1 \\ c - 4a = 1 \end{cases} \iff (a, b, c) = \left(\dfrac{10}{13}, 1, \dfrac{53}{13}\right).$

Exercice 10. 1 est racine d'ordre 2, car $P(1) = P'(1) = 0$ et $P''(1) \neq 0$.

Exercice 11. Les racines de $X^2 + X + 1$ sont j et $j^2 = \overline{j}$, avec $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$, et $j^3 = 1$.

Ainsi, puisque $311 \equiv 2\,[3]$, $82 \equiv 1\,[3]$ et $15 \equiv 0\,[3]$, $j^{311} + j^{82} + j^{15} = j^2 + j + 1 = 0$, j est donc racine de $X^{311} + X^{82} + X^{15} \in \mathbb{R}[X]$, ainsi que $\overline{j}$.

Exercice 12. $(X-1)^3 \mid P \iff 1$ est racine de multiplicité au moins 3 de P, où $P = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$. Or $P(1) = P'(1) = P''(1)$.

Exercice 13. $X^n - 1 = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$, or, pour tout $k \in [\![0\,, n-1]\!]$,

$P\left(\left(\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n\right) = P(1) = P(1^n) = 0.$

Exercice 14. Avec $P = X^{2n} + X^n + 1$ et $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$ racine de $X^2 + X + 1$,

$X^2 + X + 1 \mid P \iff j, \overline{j}$ racine de $P \underset{P\in\mathbb{R}[X]}{\iff} j$ racine de $P \iff n \equiv 1$ ou $2\,[3]$,

puisque $P(j) = j^{2n} + j^n + 1 = \begin{cases} j^0 + j^0 + 1 = 3 & \text{si } n \equiv 0\,[3] \\ j^2 + j^1 + 1 = 0 & \text{si } n \equiv 1\,[3] \\ j^4 + j^2 + 1 = 0 & \text{si } n \equiv 2\,[3] \end{cases}$

Exercice 15. $X^2 - 2\cos\theta X + 1 = \left(X - \mathrm{e}^{i\theta}\right)\left(X - \mathrm{e}^{-i\theta}\right)$.

- Si $\theta \not\equiv 0\,[\pi]$, les racines sont distinctes et conjuguées.
  Or $P = \sin\theta\, X^n - \sin(n\theta)X + \sin((n-1)\theta) \in \mathbb{R}[X]$, ainsi, il suffit de (et il faut) montrer que $e^{i\theta}$ est une racine de P.
- Si $\theta \equiv 0\,[\pi]$, alors on a une racine double 1 (ou -1) et il faut en plus vérifier que 1 (resp -1) est aussi racine de P', mais P est nul !

Exercice 16. Si α est racine multiple de $1 + X + X^n$, alors $\alpha = \dfrac{n}{1-n}$, ce qui est absurde.

Exercice 17. Le nombre de racines réelles de $X^n + aX + b$ est, en notant $\alpha = \sqrt[n-1]{\dfrac{-a}{n}}$,

$\begin{cases} 3 & \text{si } a < 0 \text{ et } \frac{1-n}{n}a\alpha > b > -\frac{1-n}{n}a\alpha \\ 2 & \text{si } a < 0 \text{ et } b = \pm\frac{1-n}{n}a\alpha \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$

Exercice 18. Le nombre de solutions de $P(x) = y$ est inférieur à $\deg P$.

Exercice 19. $P = X^n$.

Exercice 20. **1.** $P = X^2$. **2.** Aucun.

Exercice 22. **1.** $X^2P - 1 = (X+b)\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1}(X-k)$ et on obtient $b = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}$ en évaluant en 0.

Finalement $P(n+2) = \dfrac{(n+2)! + 1 + (-1)^n}{(n+2)^2}$.

2. $(X+1)P - X = \alpha\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(X-k)$ et on obtient $\alpha = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$ en évaluant en -1. Finalement $P(n+1) = \dfrac{n + 1 + (-1)^{n+1}}{(n+2)}$.

Exercice 23. $P \in \{0, 1\}$.

Exercice 25. $\left\{1 \pm 2i, \pm\sqrt{2} - 1\right\}$.

Exercice 26. $X^3 - 4X^2 + 4X - 25$.

Exercice 27. **1.a** $\sigma_1^2 - \sigma_2 = -2p$. **1.b** $\sigma_1^3 + 3\sigma_3 - 3\sigma_1\sigma_2 = -3q$.

1.c $\dfrac{\sigma_2}{\sigma_3} = -\dfrac{p}{q}$. **1.d** $\dfrac{\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_3}{\sigma_3^2} = \dfrac{p^2}{q^2}$. **2.a** $4p^3 + 27q^2 = 0$.

Exercice 28. **1.a** $P = X^3 - X^2 - 10X + 10$.

1.b Les 6 triplets (a,b,c) tels que $\{a,b,c\} = \{\pm\sqrt{10}, 1\}$.

2. Les 6 triplets (a,b,c) tels que $\{a,b,c\} = \left\{\dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}, 2\right\}$.

3. Les 6 triplets (a,b,c) tels que $\{a,b,c\} = \left\{\dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}, 1\right\}$.

Exercice 29. **1.** $b = 0$. **2.** $b = 0$ et $a^2 = 4\cos^2(\theta)c$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 32. **1.** $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} \binom{4n}{2k+1} (X-1)^k X^{2n-k-1}$.

2. $\displaystyle\prod_{k=1}^{2n-1} \cos\left(\frac{k\pi}{4n}\right) = \frac{\sqrt{2n}}{2^{2n-1}}$ et $\displaystyle\prod_{k=1}^{2n} \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right) = \frac{1}{2^{2n-1}}$.

Exercice 34. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} L_i = 1$ et $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} x_i L_i = X$

Exercice 36. **1.** $\dfrac{(-1)^{n-k}}{(k-1)!(n-k)!}$. **2.** $P = X^{n-1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{n-1} L_k$. **3.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^n = n!$.

Exercice 37. Ce sont les éléments de $\mathbb{Q}[X]$ de degré 1.

Exercice 39. $P = (X-1)(X+2)^2(X^2+X+3)$.

Exercice 40. **1.** $\deg P = 6$. **2.** -1 et 0 sont racines évidentes de P.

3. On vérifie, via P', que j est de multiplicité 2 dans P, or $P \in \mathbb{R}[X]$, ainsi $\big((X-j)(X-\bar{j})\big)^2 = (X^2+X+1)^2$ divise P.

Finalement $P = \alpha X(X+1)(X^2+X+1)^2$ avec $\alpha = \binom{7}{6} = 7$ le coefficient dominant de P

Exercice 42. **1.a.** $X^4 - 4 = (X^2-2)(X^2+2) = (X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})(X^2+2)$.

Pour factoriser $X^n + a = 0$ sur $\mathbb{C}$, on peut chercher sous forme trigonométrique $r\,\mathrm{e}^{i\theta}$, avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, les solutions de $z^n = -a$, puis regrouper les racines complexes conjuguées pour obtenir la factorisation sur $\mathbb{R}$.

1.b. $z^6 = -27 \iff r^6\,\mathrm{e}^{6i\theta} = \sqrt{3}^6\,\mathrm{e}^{i\pi} \iff \begin{cases} r = \sqrt{3} \\ 6\theta \equiv \pi\,[2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt{3} \\ \theta \equiv \frac{\pi}{6}\left[\frac{\pi}{3}\right] \end{cases}$ et il n'y a pas de racines réelles.

2.a. $z^{2n+1} = -1 \iff r^{2n+1}\,\mathrm{e}^{(2n+1)i\theta} = \mathrm{e}^{i\pi} \iff \begin{cases} r = 1 \\ \theta \equiv \frac{\pi}{2n+1}\left[\frac{2\pi}{2n+1}\right] \end{cases}$ et -1 est l'unique racine réelle. Ainsi $X^{2n+1} + 1 = (X+1) \times \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2k+1}{2n+1}\pi\right)X + 1\right)$.

2.b. $z^{2n} = 1 \iff r^{2n}\,\mathrm{e}^{(2n)i\theta} = \mathrm{e}^{0i} \iff \begin{cases} r = 1 \\ \theta \equiv 0\left[\frac{\pi}{n}\right] \end{cases}$ et ± 1 sont les seules racines réelles. Ainsi $X^{2n} - 1 = (X-1)(X+1) \times \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(X^2 - 2\cos\frac{k\pi}{n}X + 1\right)$.

2.c. $z^{2n} = -1 \iff r^{2n}\,\mathrm{e}^{(2n)i\theta} = \mathrm{e}^{i\pi} \iff \begin{cases} r = 1 \\ \theta \equiv \frac{\pi}{2n}\left[\frac{\pi}{n}\right] \end{cases}$ et il n'y a pas de racines réelles. Ainsi $X^{2n} + 1 = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)X + 1\right)$.

Exercice 41. $X^4 + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$ et se factorise sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$:

$$\left(X - \mathrm{e}^{i\pi/4}\right)\left(X - \mathrm{e}^{-i\pi/4}\right)\left(X - \mathrm{e}^{3i\pi/4}\right)\left(X - \mathrm{e}^{-3i\pi/4}\right) = \left(X^2 + \sqrt{2}X + 1\right)\left(X^2 - \sqrt{2}X + 1\right).$$

Exercice 43. **3.** $3\left(X - \frac{5}{3}\right)(X^2 + X + 1)$.

Exercice 44. **3.** Ce sont les rationnels r tels que $\cos(r\pi) \in \left\{0, \pm 1, \pm\frac{1}{2}\right\}$.

Exercice 46. **1.d** $\alpha \in \{j, \bar{j}\}$. **2** $P = 0$ ou $P = (X^2 + X + 1)^n$, avec $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 47. $P = 0$ ou $P = (X^2 + X + 1)^n$, avec $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 49. $X^2 + 1$.

Exercice 50. $X^{m \wedge n} - 1$.

Exercice 54. Ce sont les polynômes $a(X - \lambda)^n$, avec $a \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.