17 | Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Cahier de calcul : fiche 25. **Banque CCINP :** exercices 35 et 39.

Exercice 1 ●○○○ Répondre par Vrai ou Faux en justifiant.

1. Si $P \in \mathbb{C}[X]$ est de degré impair, alors P possède au moins une racine réelle.
2. Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{C}_n[X]$, alors P possède n racines distinctes.
3. Le polynôme $(X+i)^2(X-4)\left(X+\sqrt{2}\right)^2$ est de degré 5 et possède trois racines distinctes.
4. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P\left(\cos\dfrac{n\pi}{2}\right) = 0$. Alors $P = 0$.
5. Si $P'(0) = 0$, alors 0 est racine multiple de P.

Division euclidienne

Exercice 2 ●○○○
Vérifier que $X^5 - 2X^4 + 6X^3 - 4X^2 + 3X + 1$ est divisible par $X^2 - X + 1$.

Exercice 3 ●○○○ À quelle condition nécessaire et suffisante sur $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ le polynôme $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$ est-il divisible par $X^2 + 2$?

Exercice 4 ●●○○
Calculer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^4$, pour tout $n \geqslant 4$.

Exercice 5 ●●○○ Calculer le reste de la division euclidienne :

1. de $X^n(X+1)^2$ par $(X-1)(X-2)$, avec $n \in \mathbb{N}$.
2. de X^{100} par $(X-1)^3(X+1)$.
3. de X^{2n} par $\left(X^2+1\right)^2$, avec $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6 ●●○○ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que le polynôme

$$P = (X-3)^{2n} + (X-2)^n - 1$$

est divisible par $(X-3)(X-2)$ et former le quotient.

Exercice 7 ●●○○ Soit $k, n \in \mathbb{N}$, avec n non nul.
Si r désigne le reste de la division euclidienne de k par n, montrer que X^r est le reste de la division euclidienne de X^k par $X^n - 1$.

Exercice 8 ●●○○ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

1. On suppose que le reste de la division euclidienne de P par $X-1$ vaut 3, que son reste par $X-2$ vaut 7 et que son reste par $X-3$ vaut 13. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)(X-2)(X-3)$.
2. On suppose que le reste de la division euclidienne de P par X^2+4 vaut $X+1$ et que son reste par $X-3$ vaut 14. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $\left(X^2+4\right)(X-3)$.

Exercice 9 ●○○○ Soit $n \geqslant 2$ un entier et J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^k par $X^2 - nX$.
2. En déduire le calcul des puissances de la matrice J.

Racines et multiplicités

Exercice 10 ●○○○ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, quelle est la multiplicité de 1 dans

$$nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1\,?$$

Exercice 11 ●○○○ Montrer que $X^2 + X + 1$ divise $X^{311} + X^{82} + X^{15}$.

Exercice 12 ●○○○
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(X-1)^3$ divise $nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$.

Exercice 13 ●○○○ Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $P(X^n)$ est divisible par $X-1$, alors il l'est aussi par $X^n - 1$.

Exercice 14 ●●○○
Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ le polynôme $X^{2n} + X^n + 1$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?

Exercice 15 ●●○○ Montrer que, pour tous $n \geqslant 2$ et $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\sin\theta\, X^n - \sin(n\theta)X + \sin((n-1)\theta)$$

est divisible par $X^2 - 2\cos\theta\, X + 1$.

Exercice 16 ●●○○ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que le polynôme $1 + X + X^n \in \mathbb{R}[X]$ n'a que des racines simples.

Exercice 17 ●●○○ ENS SR MP 2022
Soit a, b deux réels, et $n \geqslant 3$ un entier impair. Étudier, en fonction de n, a et b, le nombre de racines réelles de $X^n + aX + b$.

Exercice 18 ●●●● Théorème de Niven (ENS Lyon MP 2022)

1. Montrer que $\cos(\pi/8)$ n'est pas rationnel.
2. Montrer qu'un entier algébrique[†] rationnel est entier.
3. Déterminer l'ensemble des rationnels r tels que $\cos(r\pi)$ est rationnel.

Exercice 19 ●●●● ENS Lyon MP 2022 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n > 0$.
Montrer que P est simplement scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall i \in [\![1\,,n-1]\!], \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(P^{(i)}(x)\right)^2 - P^{(i-1)}(x)P^{(i+1)}(x) > 0.$$

Exercice 20 ●●●○ Entrelacement des racines (Mines-Ponts MP 2022)
Soit A et B deux éléments de $\mathbb{R}[X]$. On suppose que toute combinaison linéaire de A et B est scindé sur $\mathbb{R}$ ou nulle. Si $x_1 < x_2$ sont deux racines de A, montrer que $[x_1\,,x_2]$ contient au moins une racine de B.

Nombre maximal de racines

Exercice 21 ●○○○ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant et $y \in \mathbb{R}$. Que peut-on dire du nombre de solutions de l'équation $y = P(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

†. Un *entier algébrique* est un nombre complexe racine d'un polynôme unitaire à coefficients entiers.

Exercice 22 ●○○○ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré n tel que, pour tout $k \in [\![0\,,n]\!]$, $P(k) = k^n$.

Exercice 23 ●●○○ Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

1. $P(n) = n^2$.
2. $P(n) = n^2 + (-1)^n$.

Exercice 24 ●●○○

1. Pourquoi n'existe-t-il pas de polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que :
   - **a.** pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $P(x) = \sqrt{x}$?
   - **b.** pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \sin x$?
   - **c.** pour tout $x \in [0\,,2\pi]$, $P(x) = \sin x$?
   - **d.** pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \mathrm{e}^x$?
2. Pourquoi n'existe-t-il pas de polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que :
   - **a.** pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = \overline{z}$?
   - **b.** pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = |z|^2$?

Exercice 25 ●●●○ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n.

1. On suppose que P est unitaire et que, pour tout $k \in [\![1\,,n+1]\!]$, $P(k) = \dfrac{1}{k^2}$.
   Calculer $P(n+2)$.
2. On suppose que $P(k) = \dfrac{k}{k+1}$, pour tout $k \in [\![0\,,n]\!]$. Calculer $P(n+1)$.

Exercice 26 ●●●○ Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P\left(X^2\right) = P(X-1)P(X+1)$.
Montrer que, si a est une racine de P, alors on peut trouver une racine b de P telles que $|b| > |a|$. En déduire P.

Exercice 27 ●●●○ Mines-Ponts MP 2022 Soit P et Q deux polynômes non constants de $\mathbb{C}[X]$, ainsi que a et b deux nombres complexes distincts. On suppose que $P^{-1}(\{a\}) = Q^{-1}(\{a\})$ et $P^{-1}(\{b\}) = Q^{-1}(\{b\})$. Montrer que $P = Q$.

Polynômes scindés et relations coefficients/racines

Exercice 28 ●●○○ Trouver les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $X^4+12X-5$ sachant qu'il possède deux racines dont la somme est 2.

Exercice 29 ●●○○
Soit x, y, z les trois racines complexes comptées avec multiplicité de X^3-2X+5. Déterminer l'unique polynôme unitaire de degré 3 dont les racines sont x^2, y^2 et z^2.

Exercice 30 ●○○○ Soient $p, q \in \mathbb{C}$. On pose $P = X^3+pX+q$ et on note x, y et z les trois racines complexes de P comptées avec multiplicité.

1. Simplifier en fonction de p et q les quantités suivantes :

   a. $x^2+y^2+z^2$. **b.** $x^3+y^3+z^3$. **c.** $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$. **d.** $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}$.

   Les racines x, y et z étant supposées non nulles pour les deux dernières questions.
2. **a.** Au moyen des relations coefficients/racines, prouver l'égalité
$$P'(x)P'(y)P'(z) = 4p^3+27q^2.$$
   b. À quelle condition nécessaire et suffisante sur p et q le polynôme P possède-t-il une racine multiple ?

Exercice 31 ●●○○
1. On note $(\star)$ le système $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=21 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \end{cases}$ d'inconnues $(x, y, z) \in (\mathbb{C}^*)^3$.

   Soit $(a, b, c) \in (\mathbb{C}^*)^3$, on pose $P = (X-a)(X-b)(X-c)$.

   a. Si (a, b, c) est solution du système $(\star)$, déterminer P explicitement.

   b. Résoudre $(\star)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ les systèmes $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=3 \\ xyz=2 \end{cases}$ et $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=0 \\ x^3+y^3+z^3=3. \end{cases}$

Exercice 32 ●●●○ Mines-Ponts MP 2022 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un nombre fini de polynômes P unitaires, à coefficients entiers, de degré n et tels que
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = 0 \implies |z| = 1.$$

Exercice 33 ●●○○ Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $P = (X+1)^n - \mathrm{e}^{2in\theta}$.
1. Déterminer la forme scindée de P sur $\mathbb{C}$.
2. Montrer que $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\sin(n\theta)}{2^{n-1}}$.
3. En déduire que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$.

Exercice 34 ●●●○ ENS PLSR MP 2022
1. Montrer qu'il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que
$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \sin(4n\theta) = \cos(\theta)\sin(\theta)P_n\big(\cos^2\theta\big).$$
2. Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{2n-1} \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right)$, puis $\displaystyle\prod_{k=1}^{2n-1} \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{n}\right)$.

Polynômes d'interpolation de Lagrange

Exercice 35 ●○○○ Banque d'exercices CCINP 2024 (87)
Soient $n+1$ réels $a_0, a_1, \cdots, a_n$ deux à deux distincts.
1. Montrer que si $b_0, b_1, \cdots, b_n$ sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(a_i) = b_i$, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$.
2. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Expliciter ce polynôme P, que l'on notera L_k, lorsque
$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad b_i = \delta_{i,k}.$$
3. Prouver que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p$, pour tout $p \in [\![0, n]\!]$.

Exercice 36 ●○○○ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ distincts et $L_0, \ldots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés. Simplifier $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} L_i$ et $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} x_i L_i$.

Exercice 37 ●●○○ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des réels $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ tels que
$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P\left(\frac{i}{n}\right).$$

Exercice 38 ●●○○ On note $L_1, \dots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés à $1, \dots, n$.

1. Pour tout $k \in [\![1\,,n]\!]$, exprimer le coefficient dominant de L_k au moyen de factorielles.
2. Exprimer de deux manières l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à $n-1$ pour lequel, pour tout $k \in [\![1\,,n]\!]$, $P(k) = k^{n-1}$.
3. En déduire une simplification de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^n$.

Factorisation irréductible sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Exercice 39 ●○○○ Banque d'exercices CCINP 2024 (85)

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$. En utilisant la formule de Taylor, montrer que a est une racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si
$$P^{(r)}(a) \neq 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![0\,,r-1]\!], \quad P^{(k)}(a) = 0.$$
2. Déterminer les réels a et b tels que 1 soit racine double du polynôme
$$P = X^5 + aX^2 + bX$$
et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 40 ●○○○ Soit $P = X^5 + 4X^4 + 6X^3 + 5X^2 - 4X - 12$.

1. Vérifier que -2 et 1 sont racines de P, puis déterminer leur multiplicités respectives.
2. En déduire la factorisation irréductible de P sur $\mathbb{R}$.

Exercice 41 ●○○○ Mines-Ponts MP 2022
Décomposer $X^4 + 1$ en produit d'irréductible sur $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$.

Exercice 42 ●●○○ On pose $P = (X+1)^7 - X^7 - 1$.

1. Déterminer le degré de P.
2. Déterminer deux racines évidentes entières de P, puis montrer que j est racine de P.
3. En déduire la factorisation irréductible de P sur $\mathbb{R}$.

Exercice 43 ●●○○ Déterminer la factorisation irréductible sur $\mathbb{R}$ de :

1. **a.** $X^4 - 4$. **b.** $X^6 + 27$. **c.** $X^4 + X^2 + 1$. **d.** $X^8 + X^4 + 1$.
2. **a.** $X^{2n+1} + 1$, où $n \in \mathbb{N}$. **b.** $X^{2n} - 1$, où $n \in \mathbb{N}^*$. **c.** $X^{2n} + 1$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 44 ●●○○

1. Soit $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$, $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ et $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ avec $p \wedge q = 1$.
   - **a.** Montrer que si $r = p/q$ est une racine de P, alors $q \mid a_n$ et $p \mid a_0$.
   - **b.** Que peut-on conclure si $a_n = 1$?
   - **c.** Montrer que, si p/q est une racine de P alors, pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $p - mq \mid P(m)$.
2. Montrer que le polynôme $X^3 - X^2 + 2X + 5$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.
3. Déterminer la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ de $3X^3 - 2X^2 - 2X - 5$.
4. Donner une nouvelle démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

Exercice 45 ●○○○ ENS Lyon MP 2022
Soit p un nombre premier, dont on note $p = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_0}^{10}$ l'écriture décimale. Montrer que le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 46 ●●●○ Théorème des deux carrés dans $\mathbb{R}[X]$
Considérons Σ l'ensemble
$$\Sigma = \left\{P \in \mathbb{R}[X] \;\middle|\; \exists A, B \in \mathbb{R}[X], \quad P = A^2 + B^2\right\}.$$
On souhaite montrer que Σ est exactement l'ensemble des polynômes dont les fonctions polynomiales associées sont positives sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que Σ est stable par produit.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) \geqslant 0$.
   - **a.** Montrer que si P est non nul, toute racine réelle de P est de multiplicité paire.
   - **b.** Conclure.

Exercice 47 ●●●○ Mines-Ponts MP 2022
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P\big(X^2\big) = P(X)P(X-1)$.

Exercice 48 ●●●○

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant tel que $P(X^2) = P(X)P(X-1)$.
   - **a.** Montrer que si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de P, il en va de même de α^2. En déduire que $\alpha = 0$ ou $|\alpha| = 1$.
   - **b.** Montrer que 0 n'est pas racine de P.
   - **c.** Montrer que si α est une racine complexe de P, alors $|\alpha + 1| = 1$.
   - **d.** Déduire de ce qui précède quelles sont les racines de P ainsi que la forme de P.
2. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)P(X-1)$.

Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Exercice 49 ●○○○ Calculer le PGCD des deux polynômes

$$X^5 - 4X^4 + 6X^3 - 6X^2 + 5X - 2 \quad \text{et} \quad X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1.$$

Exercice 50 ●●○○ Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $(X^m - 1) \wedge (X^n - 1)$.

Exercice 51 ●●○○ Montrer que deux polynômes $A, B \in \mathbb{K}[X]$ sont premiers entre eux si et seulement si $A + B$ et AB le sont.

Exercice 52 ●●○○

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que si P et P' sont premiers entre eux, alors P n'a pas de racine multiple dans $\mathbb{K}$. On peut donc savoir que P est à racines simples dans $\mathbb{K}$ sans connaître aucune racine de P.
2. Montrer que la réciproque est vraie si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, mais fausse si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Exercice 53 ●●○○ Mines-Ponts MP 2022 Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ irréductible. Montrer que les racines complexes de P sont simples.

Exercice 54 ●●●○ Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P' \mid P$.

Indications

Exercice 18. 3. On pourra commencer par montrer l'existence de $P_n \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire tel que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $P_n(2\cos\theta) = 2\cos(n\theta)$.

Exercice 26. Montrer que $P - Q$ a strictement plus de racines que son degré.

Exercice 44. 1.c Considérer $P(X+m)$ ou raisonner modulo $p - qm$.

3. Si p/q est racine, quelles conditions a-t-on sur $p+q$ et $p-q$?

Exercice 46. 2.b Considérer la factorisation irréductible de P sur $\mathbb{R}$.

Exercice 50. On pourra déterminer le reste de la division euclidienne de $X^m - 1$ par $X^n - 1$ en fonction du reste de celle de m par n ou factoriser dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 54. Si $P = P'Q$, que peut-on dire du facteur Q ? On pourra ensuite obtenir une relation de récurrence entre les coefficients de P.

Éléments de réponses

Exercice 1. **1.** Faux ($P = X + i$). **2.** Faux ($P = X^n$). **3.** Vrai. **4.** Faux ($P = X^3 - X$). **5.** Faux ($P = X^2 + 1$).

Exercice 2. Le reste de la division euclidienne est nul.

Exercice 3. En procédant à la division euclidienne, $\lambda = 3$ et $\mu = 2$.

Exercice 4. On pourra remarquer que $X^n = ((X-1)+1)^n$.

Le reste est $\displaystyle\sum_{k=0}^{3} \binom{n}{k} (X-1)^k = aX^3 + bX^2 + cX + d$, avec $a = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$, $b = -\dfrac{n(n-1)(n-3)}{2}$, $c = \dfrac{n(n-2)(n-3)}{2}$ et $d = -\dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$.

Exercice 5. **1.** Le reste R est de la forme $aX + b$ et $\begin{cases} R(1) = a + b = 4 \\ R(2) = 2a + b = 9 \times 2^n, \end{cases}$

soit $a = 9 \times 2^n - 4$ et $b = 8 - 9 \times 2^n$.

2. Le reste R est de la forme $aX^3 + bX^2 + cX + d$ et $R(-1) = R(1) = 1$, $R'(1) = 100$ et $R''(1) = 9900$,

soit $\begin{cases} -a + b - c + d = 1 \\ a + b + c + d = 1 \\ 3a + 2b + c = 100 \\ 6a + 2b = 9900 \end{cases} \iff (a, b, c, d) = (2450, -2400, -2450, 2401)$.

3. Méthode 1. $X^{2n} = \left(X^2 + 1 - 1\right)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \left(X^2+1\right)^k$. Ainsi le reste est $R = \dbinom{n}{1} (-1)^{n-1} \left(X^2+1\right) + \dbinom{n}{0} (-1)^n = (-1)^{n-1} \left[nX^2 + (n-1)\right]$.

Méthode 2. $\left(X^2+1\right)^2 = (X-i)^2(X+i)^2$, et on résout le système

$\begin{cases} R(i) = R(-i) = (-1)^n \\ R'(i) = 2n(-1)^{n+1} i \\ R'(-i) = 2n(-1)^n i \end{cases}$ pour déterminer les coefficients de $R = aX^3 + bX^2 + cX + d$.

Exercice 6. 2 et 3 sont racines du polynôme. Le quotient est $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-2} (3-X)^k + \sum_{k=0}^{n-2} (X-2)^k$.

Exercice 8. **1.** Le reste R est de la forme $aX^2 + bX + c$ et

$\begin{cases} R(1) = P(1) = 3 \\ R(2) = P(2) = 7 \\ R(3) = P(3) = 13 \end{cases} \iff (a, b, c) = (1, 1, 1)$.

2. Le reste R est de la forme $aX^2 + bX + c$ et $R(3) = 9a + 3b + c = 14$. En outre, $R = a(X^2 + 4) + bX + c - 4a$, ainsi $bX + c - 4a = X + 1$. Soit le système

$\begin{cases} 9a + 3b + c = 14 \\ b = 1 \\ c - 4a = 1 \end{cases} \iff (a, b, c) = \left(\dfrac{10}{13}, 1, \dfrac{53}{13}\right)$.

Exercice 10. 1 est racine d'ordre 2, car $P(1) = P'(1) = 0$ et $P''(1) \neq 0$.

Exercice 11. Les racines de $X^2 + X + 1$ sont j et $j^2 = \bar{j}$, avec $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$, et $j^3 = 1$.

Ainsi, puisque $311 \equiv 2\,[3]$, $82 \equiv 1\,[3]$ et $15 \equiv 0\,[3]$, $j^{311} + j^{82} + j^{15} = j^2 + j + 1 = 0$, j est donc racine de $X^{311} + X^{82} + X^{15} \in \mathbb{R}[X]$, ainsi que $\bar{j}$.

Exercice 12. $(X-1)^3 \mid P \iff 1$ est racine de multiplicité au moins 3 de P, où $P = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$. Or $P(1) = P'(1) = P''(1)$.

Exercice 13. $X^n - 1 = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$, or, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$P\left(\left(\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n\right) = P(1) = P(1^n) = 0$.

Exercice 14. Avec $P = X^{2n} + X^n + 1$ et $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$ racine de $X^2 + X + 1$,

$X^2 + X + 1 \mid P \iff j, \bar{j}$ racine de $P \underset{P \in \mathbb{R}[X]}{\iff} j$ racine de $P \iff n \equiv 1$ ou $2\,[3]$,

puisque $P(j) = j^{2n} + j^n + 1 = \begin{cases} j^0 + j^0 + 1 = 3 & \text{si } n \equiv 0\,[3] \\ j^2 + j^1 + 1 = 0 & \text{si } n \equiv 1\,[3] \\ j^4 + j^2 + 1 = 0 & \text{si } n \equiv 2\,[3] \end{cases}$

Exercice 15. $X^2 - 2\cos\theta X + 1 = \left(X - \mathrm{e}^{i\theta}\right)\left(X - \mathrm{e}^{-i\theta}\right)$.

- Si $\theta \not\equiv 0\,[\pi]$, les racines sont distinctes et conjuguées.
  Or $P = \sin\theta\, X^n - \sin(n\theta)X + \sin((n-1)\theta) \in \mathbb{R}[X]$, ainsi, il suffit de (et il faut) montrer que $e^{i\theta}$ est une racine de P.
- Si $\theta \equiv 0\,[\pi]$, alors on a une racine double 1 (ou -1) et il faut en plus vérifier que 1 (resp -1) est aussi racine de P', mais P est nul !

Exercice 16. Si α est racine multiple de $1 + X + X^n$, alors $\alpha = \dfrac{n}{1-n}$, ce qui est absurde.

Exercice 17. Le nombre de racines réelles de $X^n + aX + b$ est

$\begin{cases} 1 & \text{si } a \geqslant 0 \\ 2 & \text{si } a < 0 \text{ et } \sqrt[n]{\frac{b}{n-1}} = \pm \sqrt[n-1]{-\frac{a}{n}} \\ 3 & \text{sinon.} \end{cases}$

Exercice 18. **3.** Ce sont les rationnels r tels que $\cos(r\pi) \in \left\{0, \pm 1, \pm\frac{1}{2}\right\}$.

Exercice 21. Le nombre de solutions de $P(x) = y$ est inférieur à $\deg P$.

Exercice 22. $P = X^n$.

Exercice 23. **1.** $P = X^2$. **2.** Aucun.

Exercice 25. **1.** $X^2 P - 1 = (X + b) \displaystyle\prod_{k=1}^{n+1} (X - k)$ et on obtient $b = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}$ en évaluant en 0.

Finalement $P(n+2) = \dfrac{(n+2)! + 1 + (-1)^n}{(n+2)^2}$.

2. $(X+1)P - X = \alpha \displaystyle\prod_{k=0}^{n} (X - k)$ et on obtient $\alpha = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$ en évaluant en -1. Finalement $P(n+1) = \dfrac{n + 1 + (-1)^{n+1}}{(n+2)}$.

Exercice 26. $P \in \{0, 1\}$.

Exercice 28. $\left\{1 \pm 2i, \pm\sqrt{2} - 1\right\}$.

Exercice 29. $X^3-4X^2+4X-25$.

Exercice 30. **1.a** $\sigma_1^2-\sigma_2=-2p$. **1.b** $\sigma_1^3+3\sigma_3-3\sigma_1\sigma_2=-3q$.

1.c $\dfrac{\sigma_2}{\sigma_3}=-\dfrac{p}{q}$. **1.d** $\dfrac{\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_3}{\sigma_3^2}=\dfrac{p^2}{q^2}$. **2.a** $4p^3+27q^2=0$.

Exercice 31. **1.a** $P=X^3-X^2-10X+10$.

1.b Les 6 triplets (a,b,c) tels que $\{a,b,c\}=\{\pm\sqrt{10},1\}$.

2. Les 6 triplets (a,b,c) tels que $\{a,b,c\}=\left\{\dfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2},2\right\}$.

3. Les 6 triplets (a,b,c) tels que $\{a,b,c\}=\left\{\dfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2},1\right\}$.

Exercice 36. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}L_i=1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{n}x_iL_i=X$

Exercice 38. **1.** $\dfrac{(-1)^{n-k}}{(k-1)!(n-k)!}$. **2.** $P=X^{n-1}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^{n-1}L_k$. **3.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}k^n=n!$.

Exercice 40. $P=(X-1)(X+2)^2\left(X^2+X+3\right)$.

Exercice 42. **1.** $\deg P=6$. **2.** -1 et 0 sont racines évidentes de P.

3. On vérifie, via P', que j est de multiplicité 2 dans P, or $P\in\mathbb{R}[X]$, ainsi $\left((X-j)(X-\bar{j})\right)^2=\left(X^2+X+1\right)^2$ divise P.

Finalement $P=\alpha X(X+1)\left(X^2+X+1\right)^2$ avec $\alpha=\binom{7}{6}=7$ le coefficient dominant de P

Exercice 43. **1.a.** $X^4-4=\left(X^2-2\right)\left(X^2+2\right)=\left(X-\sqrt{2}\right)\left(X+\sqrt{2}\right)\left(X^2+2\right)$.

Pour factoriser $X^n+a=0$ sur $\mathbb{C}$, on peut chercher sous forme trigonométrique $r\,\mathrm{e}^{i\theta}$, avec $r>0$ et $\theta\in\mathbb{R}$, les solutions de $z^n=-a$, puis regrouper les racines complexes conjuguées pour obtenir la factorisation sur $\mathbb{R}$.

1.b. $z^6=-27 \iff r^6\,\mathrm{e}^{6i\theta}=\sqrt{3}^6\,\mathrm{e}^{i\pi} \iff \begin{cases} r=\sqrt{3} \\ 6\theta\equiv\pi\,[2\pi]\end{cases} \iff \begin{cases} r=\sqrt{3} \\ \theta\equiv\frac{\pi}{6}\left[\frac{\pi}{3}\right]\end{cases}$ et il n'y a pas de racines réelles.

2.a. $z^{2n+1}=-1 \iff r^{2n+1}\,\mathrm{e}^{(2n+1)i\theta}=\mathrm{e}^{i\pi} \iff \begin{cases} r=1 \\ \theta\equiv\frac{\pi}{2n+1}\left[\frac{2\pi}{2n+1}\right]\end{cases}$ et -1 est l'unique racine réelle. Ainsi $X^{2n+1}+1=(X+1)\times\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(X^2-2\cos\left(\frac{2k+1}{2n+1}\pi\right)X+1\right)$.

2.b. $z^{2n}=1 \iff r^{2n}\,\mathrm{e}^{(2n)i\theta}=\mathrm{e}^{0i} \iff \begin{cases} r=1 \\ \theta\equiv 0\left[\frac{\pi}{n}\right]\end{cases}$ et ±1 sont les seules racines réelles. Ainsi $X^{2n}-1=(X-1)(X+1)\times\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(X^2-2\cos\frac{k\pi}{n}X+1\right)$.

2.c. $z^{2n}=-1 \iff r^{2n}\,\mathrm{e}^{(2n)i\theta}=\mathrm{e}^{i\pi} \iff \begin{cases} r=1 \\ \theta\equiv\frac{\pi}{2n}\left[\frac{\pi}{n}\right]\end{cases}$ et il n'y a pas de racines réelles. Ainsi $X^{2n}+1=\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(X^2-2\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)X+1\right)$.

Exercice 44. **3.** $3\left(X-\frac{5}{3}\right)\left(X^2+X+1\right)$.

Exercice 48. **1.d** $\alpha\in\{j,\bar{j}\}$. **2** $P=0$ ou $P=\left(X^2+X+1\right)^n$, avec $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 49. X^2+1.

Exercice 50. $X^{m\wedge n}-1$.

Exercice 54. Ce sont les polynômes $a(X-\lambda)^n$, avec $a\in\mathbb{R}^*$, $\lambda\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$.