16 Limites et continuité des fonctions

Cahier de calcul : $\varnothing$. **Banque CCINP :** $\varnothing$.

Calculs directs de limites

Exercice 1 ●●○○ Déterminer les limites suivantes.

1. $\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)$ en $+\infty$. **2.** $\sqrt{x^3+x}-\sqrt{x^3+1}$ en $+\infty$.

3. $\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt[3]{x^3-x^2}$ en $+\infty$. **4.** $\dfrac{\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m}}{x^n}$ en 0, avec $m,n\in\mathbb{N}$.

Exercice 2 ●●○○ Déterminer les limites suivantes.

1. $x\left\lfloor \dfrac{1}{x}\right\rfloor$ en 0 et en $+\infty$. **2.** $\dfrac{x^2}{\ln(\mathrm{e}^x+1)}$ en $\pm\infty$.

3. $\dfrac{\cos\left(x^2+x\right)}{x^2+x}$ en $+\infty$. **4.** $\dfrac{5x}{\sqrt{2x^2+3}}$ en $+\infty$. **5.** $\ln(1+\mathrm{e}^x)-x$ en $+\infty$.

6. $\ln\left(3x^2-4\right)-\ln\left(2x^2+1\right)$ en $+\infty$. **7.** $\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)^x$ en $+\infty$.

8. $(\ln x+\sin x)^2$ en $+\infty$. **9.** $\ln x\times\ln\ln x$ en 1. **10.** $\dfrac{\sin(\mathrm{e}^x)+\mathrm{e}^{\sin x}+x^2}{\sqrt{x^2+1}}$ en $+\infty$.

11. $\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^{1/x}$ en $+\infty$. **12.** (●●●) $\dfrac{\mathrm{e}^{\alpha x^2}}{\mathrm{e}^{\beta x^3}+\mathrm{e}^{\gamma x}}$ en $+\infty$, avec $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$.

Exercice 3 ●●○○ Déterminer les limites suivantes.

1. $(1+x)^{1/x}$ en 0. **2.** $(x-1)^{x-1}$ en 1. **3.** $\dfrac{\sin(3\pi x)}{\sin(4\pi x)}$ en 0. **4.** $\dfrac{\ln(1+x)}{\sin\sqrt{x}}$ en 0.

5. $\dfrac{2^x-1}{\sin x}$ en 0. **6.** $\dfrac{x^\beta-1}{x^\alpha-1}$ en 0, avec $\alpha\in\mathbb{R}^*$ et $\beta\in\mathbb{R}$. **7.** $\dfrac{1}{x(x+1)}-\dfrac{1}{x}$ en 0^+.

8. $\dfrac{\sin x}{x^2\ln(1+2x)-x^4}$ en 0. **9.** $\dfrac{x^\alpha-1}{\ln x}$ en 0 et en 1, avec $\alpha\in\mathbb{R}$.

Exercice 4 ●●○○ Montrer que les fonctions suivantes n'ont pas de limite.

1. $x\longmapsto\sin(\cos x)$ en $+\infty$. **2.** $x\longmapsto\sin\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ en 0. **3.** $x\longmapsto\dfrac{x^x}{\lfloor x\rfloor^{\lfloor x\rfloor}}$ en $+\infty$.

4. $x\longmapsto\cos\left(\mathrm{e}^{1/x^2}\right)$ en 0.

Branches infinies

Exercice 5 ●○○○ On considère la fonction f définie sur $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par

$$f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2}.$$

1. Étudier la limite de f en 1. En déduire l'équation d'une asymptote à la courbe de f.

2. Montrer que la droite Δ d'équation $y=x+2$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$. Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ.

3. Tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormal.

Exercice 6 ●●○○ Étudier les branches infinies des fonctions suivantes.

1. $x\longmapsto\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$. **2.** $x\longmapsto\dfrac{x^3-4x^2+5x+1}{9-4x^2}$. **3.** $x\longmapsto\ln(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})$.

4. $x\longmapsto\sqrt[3]{\dfrac{2+3x}{x-5}}$. **5.** $x\longmapsto\sqrt{\dfrac{(x-1)^3}{x+1}}$.

Propriétés du cours

Exercice 7 ●●○○ Soit $f,g:D\longrightarrow\mathbb{R}$ deux fonctions, $a\in D$ et $\ell,\ell'\in\mathbb{R}$. On suppose que $\lim\limits_a f=\ell$ et que $\lim\limits_a g=\ell'$. Démontrer les résultats suivants du cours :

a. $\lim\limits_a(f+g)=\ell+\ell'$; **b.** $\lim\limits_a fg=\ell\ell'$; **c.** Si $\ell\neq0$, $\lim\limits_a\dfrac{1}{f}=\dfrac{1}{\ell}$.

Exercice 8 ●●○○ **Composition à gauche d'une suite par une fonction**
Soit I un intervalle, $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction, $\ell\in\overline{I}$, $L\in\overline{\mathbb{R}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle à valeurs dans I. Démontrer le résultat suivant :

$$\text{Si }\lim_{n\to+\infty}u_n=\ell\quad\text{et}\quad\text{si }\lim_{x\to\ell}f(x)=L,\quad\text{alors}\quad\lim_{n\to+\infty}f(u_n)=L.$$

Fonctions abstraites

Exercice 9 ●○○○ Déterminer toutes les fonctions $f:\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $|f(x)-f(y)| \leqslant \dfrac{x}{y}$.

Exercice 10 ●○○○
Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ périodiques qui possèdent une limite en $+\infty$.

Exercice 11 ●●○○ Soit $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée sur tout intervalle de longueur 1.

1. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))=0$.
   Soit $\varepsilon>0$ et $A \geqslant 0$ tel que, pour tout $x \geqslant A$, $|f(x+1)-f(x)| \leqslant \varepsilon$.
   a. Montrer que, pour tout $x \geqslant A$, $|f(x)-f(x-n)| \leqslant n\varepsilon$, où $n=\lfloor x-A \rfloor$.
   b. En déduire que, pour tout $x \geqslant A$, on a $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right| \leqslant \dfrac{M}{x}+\varepsilon$, où M est un majorant de $|f|$ sur $[A\,,A+1]$.
   c. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=0$.
2. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))=\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\ell$.

Exercice 12 ●●●○ Soit $f:I \longrightarrow \mathbb{R}$, où I est un intervalle ouvert contenant 0. On suppose que

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=0.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in I\backslash\{0\}$,
$$\frac{f(x)}{x}=\frac{f(x2^{-n})}{x}+\sum_{k=1}^{n}2^{-k}\varphi\big(x2^{-k}\big), \qquad \text{où } \varphi(x)=\frac{f(2x)-f(x)}{x}.$$
2. En déduire que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$.
3. Que peut-on dire si $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}=\ell\in\mathbb{R}$?

Exercice 13 ●●●○ Soit $f:\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante, non identiquement nulle et telle que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(xy)=f(x)+f(y).$$

1. Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f=+\infty$. Que vaut $\lim\limits_{0} f$?
2. Étudier le signe de f, puis en déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Continuité

Exercice 14 ●○○○ Soit m et p deux réels et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x<0 \\ mx+p & \text{si } 0 \leqslant x<2 \\ 2x-6 & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$$

À quelles conditions sur les réels m et p la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 15 ●●○○ Étudier la définition et la continuité des fonctions suivantes ainsi que leurs éventuels prolongements par continuité aux bornes.

1. $f(x)=x\,\mathrm{e}^{-1/x}$.
2. $f(x)=\dfrac{x}{2x+|x|}$.
3. $f(x)=\Big(x(\ln x)^2+1\Big)^{1/\ln x}$.
4. $f(x)=\mathrm{e}^{-1/x^2}$.
5. $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.
6. (●●●) $f(x)=\dfrac{x}{2x\ln x+\sqrt{x}}$.
7. $f(x)=\dfrac{x\ln x}{x-1}$.
8. $f(x)=\cos\left(\dfrac{\pi x}{2|x|}\right)$.
9. $f(x)=\lfloor x\rfloor+(x-\lfloor x\rfloor)^2$.
10. $f(x)=x^2\cos\dfrac{1}{x}$.
11. $f(x)=\dfrac{\cos x-1}{x^2}$.
12. $f(x)=(-1)^{\lfloor x\rfloor}\left(x-\lfloor x\rfloor-\dfrac{1}{2}\right)$.

Exercice 16 ●○○○ Soit $f, g \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ deux fonctions telles que $f|_{\mathbb{Q}}=g|_{\mathbb{Q}}$. Montrer que $f=g$.

Exercice 17 ●●●○
Trouver toutes les applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant 1 et $\sqrt{2}$ pour périodes.

Exercice 18 ●●○○ — Fonctions lipschitziennes Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$ et I un intervalle. Une application $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite k-lipschitzienne sur I lorsque

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|.$$

1. Montrer que f est continue sur I.
2. Supposons que $k \in \,]0\,,1[$, que I est un segment et que $f(I) \subset I$. On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_0 \in I$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.
   - **a.** Montrer que f admet un unique point fixe $\ell \in I$.
   - **b.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n - \ell| \leqslant k^n |x_0 - \ell|$.
   - **c.** En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
   - **d.** Déterminer une valeur de n pour laquelle x_n est une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.
3. (●●●) Supposons dorénavant que $k = 1$ que $I = [0\,,1]$. L'objet de cette question est de montrer que l'ensemble X des points fixes de f est soit vide, soit un segment. Supposons X non vide.
   - **a.** Justifier l'existence de $m = \inf X$ et $M = \sup X$.
   - **b.** Montrer que m et M appartiennent à X.
   - **c.** Conclure.

Exercice 19 ●●○○ Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$;

(ii) f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et g est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Montrer que f et g sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 20 ●●●○ Soit $f : [a\,,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante et surjective de $[a\,,b]$ sur $[f(a)\,,f(b)]$. Montrer que f est continue sur $[a\,,b]$.

Exercice 21 ●●○○ — Continuité d'une intégrale à paramètre
Soit $\varphi \in \mathscr{C}([0\,,1],\mathbb{R})$. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^1 |x - \varphi(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 22 ●●●○ — Continuité d'une suite de fonctions
Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+x)}.$$

1. **a.** Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que la suite $\left(\varphi_n(x) + \dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
   b. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, en déduire que la suite $(\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On notera $\varphi(x)$ sa limite.

On définit ainsi sur $\mathbb{R}_+^*$ une fonction $\varphi : x \longmapsto \varphi(x)$.

2. **a.** Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leqslant \varphi(x) - \varphi_n(x) \leqslant \dfrac{1}{n}$.
   b. En revenant à la définition, montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   On pourra remarquer que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $a, x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\varphi(x) - \varphi(a) = (\varphi(x) - \varphi_n(x)) + (\varphi_n(x) - \varphi_n(a)) + (\varphi_n(a) - \varphi(a)).$$

Exercice 23 ●●●● — Tératologie

1. *Fonction de Dirichlet.* Montrer que la fonction indicatrice des rationnelle $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.
2. *Fonction de Thomae.* Montrer que la fonction T de Thomae définie sur $\mathbb{R}$ par

$$T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ 1/q & \text{si } x = p/q \text{ avec } p \wedge q = 1 \text{ et } q > 0 \end{cases}$$

est continue en tout irrationnel et discontinue en tout rationnel.

Exercice 24 ●●●○ Étudier, du point de vue de la continuité et de la surjectivité, l'application de $f : [0\,,1] \longrightarrow [0\,,1]$ définie par

$$f(t) = t \text{ si } t \notin \mathbb{Q} \qquad \text{et} \qquad f(t) = 1 - t \text{ si } t \in \mathbb{Q}.$$

Exercice 25 ●●○○
Exhiber une application de $[0\,,1]$ dans $[0\,,1]$ bijective et discontinue en tout point.

Équations fonctionnelles

Exercice 26 ●○○○ Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues en 0 telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = f(x)$.

Exercice 27 ●●○○ Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) - f(x) = x.$$

Exercice 28 ●●○○ Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Exercice 29 ●●○○ Notons $\mathcal{A} = \left\{ g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,\middle|\, \forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x^2) = g(x) \right\}$.

1. Donner un exemple de fonction non constante appartenant à $\mathcal{A}$.
2. Soit f une fonction de $\mathcal{A}$ qui est continue en 0 et en 1. Montrer que, pour tous $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = f\left(x^{1/2^n}\right)$. En déduire que f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 30 ●●○○ Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{C}\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\right)$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(xy) = f(x)f(y).$$

Exercice 31 ●●●○ On s'intéresse aux fonctions $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f\left(x^2 + f(y)\right) = f(x)^2 + y \qquad (\star)$$

1. Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une solution de la relation $(\star)$.
   a. Montrer que $f(-x) \in \{-f(x), f(x)\}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis que f est impaire.
   b. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f\left(x^2\right) = f(x)^2$ et $f \circ f(x) = x$.
   c. Montrer que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tous $x, y \geqslant 0$, puis en déduire la forme de f.
2. Déterminer toutes les solutions continues de la relation $(\star)$.

Théorèmes liés à la continuité

Exercice 32 ●○○○
Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $f(x)^2 = 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 33 ●○○○
Soit $f \in \mathscr{C}([0\,,1], [0\,,1])$. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 34 ●●○○
Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ décroissante. Montrer que f possède un et un seul point fixe dans $\mathbb{R}$.

Exercice 35 ●●○○ Soit I un intervalle et $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ une fonction qui stabilise I. On suppose que $f \circ f$ possède un point fixe. Montrer qu'alors f en possède un aussi.

Exercice 36 ●●○○ Soit f une fonction continue et bijective de $[0\,,1]$ sur $[0\,,1]$ vérifiant $f(0) \neq 1$. Montrer que $f(0) = 0$.

Exercice 37 ●●○○ Un randonneur parcourt 6 km en une heure. Montrer qu'il existe au moins un intervalle d'une demi-heure au cours duquel il parcourt exactement 3 km.

Exercice 38 ●●○○ Le TVI est faux dans $\mathbb{Q}$
On considère la fonction polynomiale $f : x \longmapsto 2x^3 - x + 1$.

1. Montrer que f réalise une surjection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les entiers premiers p tel que $1/p$ ait un antécédent par f dans $\mathbb{Q}$.
3. Conclure.

Exercice 39 ●○○○

1. Montrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{\sin x}{\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x \sin \mathrm{e}^{-x}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 40 ●●●○ Soit $f : [-1\,,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $u \in \mathbb{R}$, considérons la fonction $g_u : x \longmapsto ux - f(x)$ sur $[-1\,,1]$.

1. Soit $u \in \mathbb{R}$. Montrer que g_u admet un maximum $M(u)$. On note E_u l'ensemble des réels de $[-1\,,1]$ en lesquels g_u atteint son maximum.
2. Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ et $(x,y) \in E_u \times E_v$. Montrer que
$$M(u) - M(v) \leqslant (u-v)x \quad \text{et} \quad M(v) - M(u) \leqslant (v-u)y.$$
En déduire que $|M(v) - M(u)| \leqslant |v-u|$.
3. Montrer que la fonction $M : u \longmapsto M(u)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 41 ●○○○ Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées.

Exercice 42 ●●○○ Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

1. Montrer que si f est périodique, alors elle est bornée.
2. Montrer que si f possède des limites finies en $-\infty$ et $+\infty$, alors elle est bornée.
3. Montrer que si de plus ses limites en $-\infty$ et $+\infty$ coïncident, alors f possède un minimum ou un maximum sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que si $\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{+\infty} f = +\infty$, alors f possède un minimum sur $\mathbb{R}$.

Exercice 43 ●●○○ Soit $f, g \in \mathscr{C}([a\,,b],\mathbb{R})$. On suppose que, pour tout $x \in [a\,,b]$, $f(x) < g(x)$. Montrer que :
$$\exists \lambda > 0, \quad \forall x \in [a\,,b], \quad f(x) + \lambda \leqslant g(x).$$

Exercice 44 ●●●○ Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ surjective. Montrer que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ possède une infinité de solutions.

Exercice 45 ●●●○ Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) + f'(x)) = 0$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Indications

Exercice 10. Penser à la caractérisation séquentielle de la limite.

Exercice 17. Que peut-on dire de la partie $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\,\mathbb{Z}$ (cf. exercice 18 du TD 11).

Exercice 28. Déterminer f sur $\mathbb{N}$, puis sur $\mathbb{Z}$, puis sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 30. On pourra poser $g = \ln \circ f$ et montrer que g est dérivable.

Exercice 33 et 34. On pourra s'intéresser à $x \longmapsto f(x) - x$

Exercice 45. Poser $g(x) = f(x) + f'(x)$ et exprimer f en fonction de g via notamment une intégrale qu'il faudra *in fine* découper adroitement.

Éléments de réponses

Exercice 1. **1.** 1. **2.** 0. **3.** $\dfrac{2}{3}$. **4.** $\begin{cases} 0 & \text{si } m > n \text{ ou } m = 0 \\ 1 & \text{si } m = n \neq 0 \\ +\infty & \text{si } m < n \text{ et } m-n \text{ pair} \\ \text{pas de limite} & \text{si } m < n \text{ et } m-n \text{ impair} \end{cases}$

Exercice 2. **1.** 1 et 0. **2.** $+\infty$ et $+\infty$. **3.** 0. **4.** $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$. **5.** 0. **6.** $\ln \dfrac{3}{2}$. **7.** e^4. **8.** $+\infty$.
9. 0. **10.** $+\infty$. **11.** 1.

Exercice 3. **1.** e. **2.** 1. **3.** $\dfrac{3}{4}$. **4.** 0. **5.** $\ln 2$. **7.** -1. **8.** $+\infty$.
6. $\begin{cases} 0 & \text{si } \beta = 0 \text{ ou } (\alpha < 0 \text{ et } \beta > \alpha) \\ 1 & \text{si } \alpha, \beta > 0 \text{ ou } \alpha = \beta < 0 \\ -\infty & \text{si } \alpha > 0 \text{ et } \beta < 0 \\ +\infty & \text{si } \beta < \alpha < 0. \end{cases}$ **9.** En 0 $\begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \geqslant 0 \\ -\infty & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$ et en 1 $\begin{cases} 0 & \text{si } \alpha = 0 \\ \alpha & \text{si } \alpha \neq 0. \end{cases}$

Exercice 6. **1.** $y = 1$ en $+\infty$ et $y = -1$ en $-\infty$. **2.** $x = \pm\dfrac{3}{2}$ et $-\dfrac{x}{4} + 1$ en $\pm\infty$.
3. $y = x$ en $+\infty$ et $y = -x$ en $-\infty$. **4.** $x = 5$ et $y = \sqrt[3]{3}$ en $\pm\infty$.
5. $x = -1$, $y = 2 - x$ en $-\infty$ et $y = x - 2$ en $+\infty$.

Exercices 9 et 10. f est constante.

Exercice 14. $(m,p) = (-1/2, -1)$.

Exercice 15. **1.** $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^*,\mathbb{R})$. **2.** $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^*,\mathbb{R})$.
3. $f \in \mathscr{C}(]0\,,1[\cup]1\,,+\infty[,\mathbb{R})$, $f(0) = f(1) = 1$. **4.** $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^*,\mathbb{R})$, $f(0) = 0$.
5. $f \in \mathscr{C}(]-1\,,0[\cup]0\,,+\infty[,\mathbb{R})$, $f(0) = 1$.
6. $f \in \mathscr{C}(]0\,,\alpha_1[\cup]\alpha_2\,,+\infty[,\mathbb{R})$, avec $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1/2$ et $f(0) = 0$.
7. $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^*,\mathbb{R})$, $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. **8.** $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^*,\mathbb{R})$, $f(0) = 0$.
9. $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. **10.** $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^*,\mathbb{R})$, $f(0) = 0$. **11.** $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^*,\mathbb{R})$, $f(0) = -\dfrac{1}{2}$.
12. $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 26. Fonctions constantes.

Exercice 27. $x \longmapsto x + a$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 28. Les fonctions linéaires $x \longmapsto ax$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 30. $x \longmapsto x^\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, et la fonction nulle.

Exercice 31. $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 32. f est constante égale à 1 ou à -1 sur $\mathbb{R}$.