

Cahier de calcul : fiche 24.

Banque CCINP : exercice 40.

Exercice 1 ●○○○ — ☒ **Vrai ou Faux ?**

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors $(u_n)_{n \geq 0}$ n'est pas majorée.
- Un produit de deux suites réelles minorées est minorée.
- Une suite croissante à partir d'un certain rang est minorée.
- Si $(|u_n|)_{n \geq 0}$ converge, alors $(u_n)_{n \geq 0}$ converge.
- Si $(|u_n|)_{n \geq 0}$ tend vers 0, alors $(u_n)_{n \geq 0}$ tend vers 0.
- Une suite convergente est monotone à partir d'un certain rang.
- Une suite convergente et majorée est croissante.
- Une suite divergeant vers $+\infty$ est croissante à partir d'un certain rang.
- Si $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante et $u_n \leq v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $(v_n)_{n \geq 0}$ est croissante.
- Si $(u_n)_{n \geq 0}$ est divergente, alors la suite définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, est divergente.
- Si $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers $\ell \neq 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.
- Une somme de suites croissantes est croissante.
- Un produit de suites croissantes est croissante.

Limites

Exercice 2 ●○○○ — ☒ **?**

Dans chacun des cas suivants, étudier la limite de la suite de terme général

- $\frac{n^4 - 1}{n^3 + 2n + 1}$.
- $\frac{\sqrt{n + \sin n}}{n^2 - n}$.
- $\frac{n + (-1)^n \sqrt{n}}{2n + 1}$.
- $\frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n}$.
- $\frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^{n+1}}$.
- $\frac{n!}{n^n}$.
- $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$.
- $\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n [kx] \quad (x \in \mathbb{R})$.
- $\frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n k!$.
- $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k^2}$.
- $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$.
- $\sqrt{e^n + 2^n} - \sqrt{e^n + 1}$.

Exercice 3 ●○○○ — ☒Soit $q > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence de la suite $\left(\frac{q^n + n^\alpha}{1 + \ln^\beta n} \right)_{n \geq 0}$ en fonction de q , α et β .**Exercice 4** ●○○○ — ☒Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite à termes strictement positifs et $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$.

- Montrer que si $\ell < 1$ (resp. $\ell > 1$) la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers 0 (resp. diverge vers $+\infty$).
- Que peut-on dire si $\ell = 1$.
- Application.** Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!}$, avec $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n!}$.

Suites adjacentes

Exercice 5 ●○○○ — ☒**Série harmonique (alternée)**Soit les suites $(h_n)_{n \geq 1}$ et $(H_n)_{n \geq 1}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad H_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}.$$

- Justifier que la suite $(h_n)_{n \geq 1}$ est croissante.
 - Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h_{2n} - h_n \geq \frac{1}{2}$.
 - En déduire que la suite $(h_n)_{n \geq 1}$ diverge vers $+\infty$.
- On introduit les suites $(u_n)_{n \geq 2}$ et $(v_n)_{n \geq 2}$ définies, pour tout $n \geq 2$, par

$$u_n = h_n - \ln n \quad \text{et} \quad v_n = h_{n-1} - \ln n.$$

- Montrer que les suites $(u_n)_{n \geq 2}$ et $(v_n)_{n \geq 2}$ convergent vers une limite commune, notée γ^\dagger . (Indication : on pourra utiliser une majoration classique de $\ln(1+x)$.)
 - Retrouver la divergence de la suite $(h_n)_{n \geq 1}$.
 - Quelle information supplémentaire obtient-on quant à la divergence de la suite $(h_n)_{n \geq 1}$?
- Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite décroissante de limite nulle. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - Montrer que les suites $(S_{2n})_{n \geq 0}$ et $(S_{2n+1})_{n \geq 0}$ sont adjacentes.
 - En déduire que la suite (S_n) converge.
 - Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n$. (On pourra s'aider de la suite $(h_n)_{n \geq 1}$ et de la question 2.a.)

— **Exercice 6** ●○○ — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes.

— **Exercice 7** ●○○ — ? **Irrationalité de e**

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ les suites définies, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

On admet que leur limite commune est e .

2. En déduire que e est un nombre irrationnel.

— **Exercice 8** ●○○ — Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$.

On définit deux suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ en posant $a_0 = a$, $b_0 = b$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{b_n a_{n+1}}.$$

1. Montrer que les suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ sont adjacentes.

2. a. Justifier l'existence d'un réel $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\cos \alpha = \frac{a}{b}$.

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n \cos \frac{\alpha}{2^n}$, puis $b_n = \frac{b \sin \alpha}{2^n \sin \frac{\alpha}{2^n}}$.

c. En déduire la limite commune des deux suites.

Exercices epsilonesques

— **Exercice 9** ●○○ —

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle positive telle que l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n > 10^{-k}\}$ soit fini, pour tout $k \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers 0.

— **Exercice 10** ●○○ —

Montrer que toute suite convergente à valeurs dans \mathbb{Z} est stationnaire.

†. Ce réel γ est appelé *constante d'Euler-Mascheroni*. Il vaut approximativement 0,577 215 et on ne sait toujours pas en 2026 si ce réel est rationnel ou non.

— **Exercice 11** ●○○ — Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ deux suites réelles convergentes. Étudier $\lim_{n \rightarrow +\infty} \max\{u_n, v_n\}$ de deux manières différentes.

1. En commençant par chercher une expression simple de $\max\{x, y\}$ en fonction de x et y , pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. (Indication : on pourra s'aider de la valeur absolue.)

2. En revenant à la définition de la limite.

— **Exercice 12** ●●○ — ✓ Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_n = \lfloor u_n \rfloor$. Étudier $\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n$ dans chacun des cas suivants :

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. 2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. 3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \in \mathbb{Z}$.

— **Exercice 13** ●●○ — **Théorème de Cesàro**

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels et $(v_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k.$$

1. On suppose que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0. Soit $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tels que, pour tout $n \geq n_0$, $|u_n| \leq \varepsilon$.

a. Montrer que, pour tout $n \geq n_0$, on a $|v_n| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0-1} |u_k| + \varepsilon$.

b. En déduire que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0.

c. Que dire de la réciproque ?

2. Déduire de la question précédente que si la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers ℓ , il en va alors de même de la suite $(v_n)_{n \geq 1}$. (Théorème de Cesàro)

3. Étudier le cas où la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ diverge vers $\pm\infty$.

4. Montrer que les réciproques de 2. et 3. sont vraies dans le cas où $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

— **Exercice 14** ●○○ — ✓ **Lemme de l'escalier**

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Démontrer, à l'aide du théorème de Cesàro, que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = \ell$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = \ell. \quad (\text{Lemme de l'escalier}).$$

2. En déduire que si $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite à termes strictement positifs telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell, \quad \text{alors} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell.$$

3. Déterminer la limite de la suite de terme général $\left(\frac{2n}{n}\right)^{1/n}$.

— **Exercice 15** ●●● — Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ deux suites réelles convergentes de limites respectives a et b . Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = ab.$$

— **Exercice 16** ●●● — **Mines-Ponts MP 2022** Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle et $(b_n)_{n \geq 0}$ une suite strictement croissante non majorée d'éléments de \mathbb{R}_+^* .

1. On suppose que $(a_n)_{n \geq 0}$ converge vers ℓ . Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{b_n} \sum_{k=0}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) a_k = \ell.$$

2. On suppose que $\left(\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \right)_{n \geq 0}$ converge vers ℓ . Que dire de $\left(\frac{a_n}{b_n} \right)_{n \geq 0}$?

— **Exercice 17** ●●● — **Lemme sous-additif de Fekete**

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle sous-additive, i.e. pour laquelle

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, \quad u_{m+n} \leq u_m + u_n.$$

On pose $A = \left\{ \frac{u_n}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

1. On suppose A minoré et on pose $a = \inf A$.

a. Soient $n, N \in \mathbb{N}^*$. La division euclidienne de n par N s'écrit $n = Nq + r$ pour certains $q \in \mathbb{N}$ et $r \in [0, N-1]$. Montrer que : $\frac{u_n}{n} \leq \frac{u_N}{N} + \frac{u_r}{n}$.

b. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = a$.

2. Si A n'est pas minoré, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = -\infty$.

En résumé, la suite $\left(\frac{u_n}{n} \right)_{n \geq 0}$ possède toujours une limite (*lemme sous-additif de Fekete*).

Caractérisation séquentielle

— **Exercice 18** ●●● — Soit A et B deux parties non vides de \mathbb{R} .

On suppose que A et B sont adjacentes, i.e.

$$\forall (a, b) \in A \times B, \quad a \leq b \quad \text{et} \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists (a, b) \in A \times B, \quad b - a < \varepsilon.$$

Montrer qu'alors $\sup A = \inf B$.

— **Exercice 19** ●○○○ — ☒

Déterminer les bornes inférieure et supérieure des parties suivantes.

$$\begin{array}{lll} \text{a. } \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} \right\}_{n \geq 1} & \text{b. } \left\{ \frac{1}{p-q} \right\}_{p, q \in \mathbb{Z}, p \neq q} & \text{c. } \left\{ \frac{(-1)^k k}{k+1} \right\}_{k \in \mathbb{N}^*} \\ \text{d. } \left\{ \frac{pq}{p^2 + q^2} \right\}_{p, q \in \mathbb{N}^*} & \text{e. } \left\{ \frac{p + \sqrt{q}}{\sqrt{p} + q} \right\}_{p, q \in \mathbb{N}^*} & \end{array}$$

— **Exercice 20** ●●● —

On considère deux suites $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ qui divergent vers $+\infty$ et telles que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0.$$

On fixe $\varepsilon > 0$ et on considère un rang n_0 à partir duquel $|u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon$.

1. Montrer que, pour tout réel x tel que $x \geq u_{n_0}$, il existe un terme u_p de la suite tel que $|u_p - x| \leq \varepsilon$.

2. a. Montrer que, pour tout réel x , il existe $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $|u_p - v_n - x| \leq \varepsilon$.
b. En déduire la densité de l'ensemble $\{u_m - v_n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ dans \mathbb{R} .

3. **Application.** Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite vérifiant les deux hypothèses qui précèdent. Montrer que $\{u_n - [u_n] \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0, 1]$.

Suites complexes

— **Exercice 21** ●●○○ —

1. a. Soit $(r_n)_{n \geq 0}$ et $(\theta_n)_{n \geq 0}$ deux suites réelles convergentes. Étudier $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n e^{i\theta_n}$.

b. Soit $(z_n)_{n \geq 0}$ une suite complexe convergente. Étudier $\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n|$.

2. Soit $(z_n)_{n \geq 0}$ une suite complexe convergente de limite 1.

a. Montrer que, pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $|\sin x| \geq \frac{2}{\pi}|x|$.

b. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \arg(z_n)$.

3. Soit (z_n) une suite complexe convergente de limite non nulle. Étudier $\lim_{n \rightarrow +\infty} \arg(z_n)$.

— **Exercice 22** ●○○ — Soit $(z_n)_{n \geq 0}$ une suite complexe telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n^2 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, |z_{n+1} - z_n| < 1.$$

1. Montrer qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, |z_n - 1| \leq \frac{1}{2} \text{ ou } |z_n + 1| \leq \frac{1}{2}.$$

2. En déduire que la suite $(z_n)_{n \geq 0}$ converge.

— **Exercice 23** ●●○ — ☒ Soit $(z_n)_{n \geq 0}$ une suite complexe pour laquelle, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$. Étudier la convergence de $(z_n)_{n \geq 0}$ et sa limite éventuelle.

Suites extraites

— **Exercice 24** ●○○ —

- Montrer que la relation « la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ est une sous-suite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ » est une relation d'ordre sur l'ensemble des suites.
- Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite numérique. Parmi les suites suivantes, trouver celles qui sont extraites d'une autre :

$$(u_{3n})_{n \geq 0}, (u_{6n})_{n \geq 0}, (u_{2n})_{n \geq 0}, (u_{3 \cdot 2^n})_{n \geq 0}, (u_{3 \cdot 2^{n+1}})_{n \geq 0}, (u_{2^n})_{n \geq 0} \text{ et } (u_{2^{n+1}})_{n \geq 0}.$$

— **Exercice 25** ●○○ — ☒

Que peut-on dire d'une suite réelle croissante qui admet

- une suite extraite convergente ?
- une suite extraite majorée ?

— **Exercice 26** ●○○ — On considère une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ croissante qui vérifie

$$\forall p \in \mathbb{N}, |u_{2^{p+1}} - u_{2^p}| \leq \frac{1}{2^p}.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente.

— **Exercice 27** ●○○ —

Montrer qu'une suite non majorée admet une suite extraite qui diverge vers $+\infty$.

— **Exercice 28** ●○○ — Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle. Montrer que $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente dans les deux cas suivants :

- $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante et $(u_{2n})_{n \geq 0}$ convergente.
- $(u_{2n})_{n \geq 0}$, $(u_{2n+1})_{n \geq 0}$ et $(u_{3n})_{n \geq 0}$ convergent.

— **Exercice 29** ●○○ —

Dans chacun des cas suivants, montrer que la suite en jeu n'a pas de limite.

- Pour tout $n \geq 2$, u_n est l'inverse du nombre de diviseurs premiers distincts de n .
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sin\left(\frac{n^2\pi}{3}\right)$.

— **Exercice 30** ●●○ —

Montrer que $[-1, 1]$ est l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\cos(\ln n))_{n \geq 1}$.

— **Exercice 31** ●●○ — On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$.

- Étudier $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n^2+n}$. En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ n'a pas de limite.
- Soit $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ avec $a \leq b$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{b^2n^2+2an} = \frac{a}{b}$.
- Montrer que tout élément de $[0, 1]$ est la limite d'une certaine suite extraite de $(u_n)_{n \geq 0}$.

— **Exercice 32** ●●○ — On admet l'irrationalité de π .

Montrer que la suite $(\tan n)_{n \geq 0}$ est bien définie et n'a pas de limite.

— **Exercice 33** ●●○ — Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

Montrer qu'aucune des deux suites $(\sin(n\theta))_{n \geq 0}$ et $(\cos(n\theta))_{n \geq 0}$ n'a de limite.

— **Exercice 34** ●●○ — ☒ Mines-Ponts MP 2022

- Montrer que tout sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ est soit de la forme $a\mathbb{Z}$, pour $a \in \mathbb{R}_+$, soit dense dans \mathbb{R} .

Dans la suite de l'exercice, on fixe un réel θ tel que $\theta/\pi \notin \mathbb{Q}$.

- Montrer que $\theta\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans \mathbb{R} .
- Déterminer les valeurs d'adhérence de la suite $(\cos(n\theta))_{n \geq 0}$.
- Déterminer les valeurs d'adhérence de la suite $(\cos(\sqrt{n}\theta))_{n \geq 0}$.

— **Exercice 35** ●●●○ — Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite complexe pour laquelle

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{u_n}{2^n}.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_n = \max\{|u_n|, |u_{n+1}|\}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_{n+1} \leq \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)m_n$.
2. En déduire que $m_n \leq e^2 m_0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une fonction $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante pour laquelle la suite $(u_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ converge.
3. Déterminer un réel positif a pour lequel, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{\varphi(n)} - u_n| \leq \frac{a}{2^n}$.
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge.

— **Exercice 36** ●●●○ —

1. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite complexe bornée. On suppose que $(u_n)_{n \geq 0}$ possède au plus une valeur d'adhérence. Montrer que $(u_n)_{n \geq 0}$ converge.
2. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite complexe bornée pour laquelle $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3u_n + u_{2n}) = 1$.
 - a. Que vaut la limite de $(u_n)_{n \geq 0}$ si elle converge ?
 - b. Soit ℓ_0 une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \geq 0}$. On note φ une fonction strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} pour laquelle $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\varphi(n)} = \ell_0$.
 - (i) Montrer que la suite $(u_{2^k \varphi(n)})_{n \geq 0}$ possède une limite $\ell_k \in \mathbb{C}$, pour $k \in \mathbb{N}$.
 - (ii) Déterminer une expression explicite de ℓ_k en fonction de k , pour $k \in \mathbb{N}$.
 - (iii) Montrer que la suite $(\ell_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée, puis en déduire ℓ_0 .
 - c. En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge.

Suites récurrentes linéaires

— **Exercice 37** ●○○○ — ✓ Pour chacune des suites suivantes définies par récurrence, donner une expression du terme général en fonction de n .

1. $\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{e^2}. \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_0 = -2, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} + u_n = \pi. \end{cases}$
3. $\begin{cases} u_0 = 4, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{3u_n - 2}{5}. \end{cases}$
4. $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 2, \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1}. \end{cases}$
5. $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = \frac{2}{3}, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + 4u_n = 2u_{n+1}. \end{cases}$
6. $\begin{cases} u_0 = -1, u_1 = 1, u_2 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 7u_{n+1}. \end{cases}$

— **Exercice 38** ●●○○ — ✓

Expliciter en fonction de n le terme général de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par

1. $\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2u_n^2. \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_0 = 1, \quad u_1 = 2, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^6}{u_n^5}. \end{cases}$

— **Exercice 39** ●●○○ — ✓ Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + (-1)^n.$$

1. Déterminer α pour que la suite $(s_n)_{n \geq 0}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $s_n = \alpha n (-1)^n$ vérifie la même relation de récurrence que $(u_n)_{n \geq 0}$.
2. En déduire une expression de u_n en fonction de u_0 , u_1 et n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Suites récurrentes « $u_{n+1} = f(u_n)$ »

— **Exercice 40** ●○○○ — ✓ Banque d'exercices CCINP 2025 (43)

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ par

$$u_0 = x_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \text{Arctan}(u_n).$$

- a. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0 , le sens de variation de $(u_n)_{n \geq 0}$.
- b. Montrer que $(u_n)_{n \geq 0}$ converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions h , continues sur \mathbb{R} , telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = h(\text{Arctan } x).$$

— **Exercice 41** ●●○○ — Dans chacune des situations suivantes, déterminer les variations de la fonction sous-jacente, la position de son graphe par rapport à la droite d'équation $y = x$ ainsi que quelques domaines stables intéressants, puis étudier en fonction de u_0 la nature de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

1. $u_{n+1} = u_n - \ln u_n$.
2. $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$.
3. $u_{n+1} = 1 + \ln u_n$.
4. $u_{n+1} = 1 + \frac{u_n^2}{4}$.
5. (●●●) $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + u_n}{2}$.
6. (●●●) $u_{n+1} = \left| u_n^2 - \frac{1}{4} \right|$.

— **Exercice 42** ●●○○ — On note f la fonction $x \mapsto \sqrt{2-x}$ sur $]-\infty, 2]$.

1. Pour quelles valeurs de u_0 peut-on définir une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$?

On suppose désormais que u_0 a une telle valeur.

2.
 - a. Déterminer les points fixes de f et montrer qu'ils sont points fixes de $f \circ f$.
 - b. Montrer que les points fixes de $f \circ f$ sont racines d'un polynôme P de degré 4
 - c. Vérifier que P admet -2 pour racine et en déduire les points fixes de $f \circ f$.
3. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

— **Exercice 43** ●●○○ — Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite. On suppose $u_0 > 0$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^n u_k}.$$

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Étudier $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
3. Étudier $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n)$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n}$ grâce au théorème de Cesàro.

— **Exercice 44** ●●○○ — Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite. On suppose $u_0 > 0$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}.$$

1. Étudier $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = e^{u_n}$.
 - a. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_{n+1} - v_n) = 1$.
 - b. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\ln n}$, grâce au théorème de Cesàro.

— **Exercice 45** ●●○○ — Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite éventuellement définie par la donnée de $u_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation $u_{n+1} = 2 + \ln u_n$.

1. On note f l'application $x \mapsto 2 + \ln x$. Montrer que l'équation $f(x) = x$ possède deux solutions α et β . Étudier le signe de $f(x) - x$.
2. Étudier le comportement de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ selon les valeurs de u_0 .

— **Exercice 46** ●●○○ —   **X MP 2022**

Étudier la convergence des suites réelles $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ vérifiant


$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \int_0^1 \max\{x, v_n\} dx \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \int_0^1 \max\{x, u_n\} dx.$$

Suites définies implicitement

— **Exercice 47** ●●○○ — Soient I un intervalle et $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions de I dans \mathbb{R} . On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue $x \in I$ possède une et une seule solution x_n ;
- la fonction f_n est strictement croissante sur I ;
- pour tout $x \in I$: $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$.

1. Conjecturer, à partir d'un dessin, le sens de monotonie de la suite $(x_n)_{n \geq 0}$.
2. Prouver proprement cette conjecture.

— **Exercice 48** ●●○○ —  Soit $n \geq 2$ et f_n la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par

$$f_n(x) = x^n - x - 1.$$

1. Montrer qu'il existe un unique $x_n > 1$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est décroissante et qu'elle converge vers une limite ℓ , que l'on déterminera.

— **Exercice 49** ●●○○ — 

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x^n = \cos x$ d'inconnue $x \in [0, 1]$ possède une et une seule solution x_n .
2. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

Éléments de réponses

- Exercice 1.** 1. Vrai. 2. Faux : $(n)^{n \geq 0}$ et $(-1)^{n \geq 0}$. 3. Vrai. 4. Faux : $((-1)^n)^{n \geq 0}$. 5. Vrai. 6. Faux : $\left(\frac{n}{(-1)^n}\right)^{n \geq 0}$. 7. Faux : idem e. 8. Faux : $(n + (-1)^n)^{n \geq 0}$. 9. Faux : $u_n = n$ et $v_n = n + 1 + (-1)^n$. 10. Faux $(n)^{n \geq 0}$. 11. Vrai. 12. Vrai. 13. Faux : $u_n = n$ et $v_n = -1$.
- Exercice 2.** 1. $+\infty$. 2. 0. 3. $\frac{1}{3}$. 4. 0. 5. $-\frac{1}{3}$. 6. 0. 7. $+\infty$. 8. $\frac{2}{x}$. 9. 1. 10. 0. 11. 1. 12. $+\infty$.
- Exercice 3.** $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q^n + \ln^\beta n}{q^n + n^\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{si } (q < 1 \text{ et } \alpha < 0) \text{ ou } (\beta > 0 \text{ et } (q \leq 1 \text{ ou } \alpha \leq 0)) \\ 1 & \text{si } [\beta < 0 \text{ et } (q > 1 \text{ et } \alpha = 0) \text{ ou } (q = 1 \text{ et } \alpha < 0)] \\ 2 & \text{si } q = 1 \text{ et } \alpha = 0 \text{ et } \beta < 0 \\ 1/2 & \text{si } \beta = 0 \text{ et } (q > 1 \text{ et } \alpha = 0) \text{ ou } (q = 1 \text{ et } \alpha < 0) \end{cases}$.
- Exercice 4.** 2. Rien. 3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{x^n} = +\infty$.
- Exercice 5.** 4. $-\ln 2$.
- Exercice 12.** 1. $+\infty$. 2. $\left[\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \right]$. 3. Pas de limite en général.
- Exercice 14.** 3. 4.
- Exercice 19.** a. -1 et $\frac{2}{3}$. b. -1 et 1. c. -1 et 1. d. 0 et $\frac{1}{2}$. e. 0 et $+\infty$.
- Exercice 23.** La suite $(z_n)_{n \geq 0}$ converge vers $\begin{cases} 0 & \text{si } z_0 \in \mathbb{R}^- \\ z_0 & \text{si } z_0 \in \mathbb{R}^+ \\ |z_0|^{\frac{\sin(\arg z_0)}{\arg z_0}} & \text{si } z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \end{cases}$ sinon.
- Exercice 25.** Dans les deux cas la suite converge.
- Exercice 34.** 3. $[-1, 1]$. 4. $[-1, 1]$.
- Exercice 37.** 1. $u_n = e^{-2n}$. 2. $u_n = -\frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi}(-1)^n + \frac{5}{\pi} \times \left(\frac{3}{5}\right)^n - 1$.
- Exercice 38.** 1. $u_n = 2^{2^{n-1}}$. 2. $u_n = 2^{\frac{1}{3}(5^{n-1})}$.
- Exercice 39.** 1. $\alpha = \frac{1}{3}$. 2. $u_n = \frac{1}{6} \left[(3u_0 + 3u_1 + 1)2^n + (3n + 6u_0 - 3u_1 - 1)(-1)^n \right]$.
- Exercice 40.** 1. b. $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers 0. 2. Les fonctions constantes.
- Exercice 46.** Si $u_0 = v_0 = a \geq 1$, les deux suites sont constantes égales à a . Sinon, chacune des deux suites converge (vers 1) si et seulement si $u_0 \leq 1$ et $v_0 \leq 1$.
- Exercice 48.** 2. $\ell = 1$.
- Exercice 49.** 2. $\lim x_n = 1$.
- Exercice 50.** 3. $\lim x_n = 1/2$.

Indications

- Exercice 2.** 9. On pourra isoler les deux derniers termes de la somme.
- Exercice 7.** Raisonner par l'absurde et exploiter l'encadrement $u_n < e < v_n$.
- Exercice 31.** 2. Montrer que $\lfloor \sqrt{b^2 n^2 + 2an} \rfloor = bn$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Exercice 32.** Raisonner par l'absurde et utiliser les formules de trigonométrie.
- Exercice 33.** On pourra commencer par établir que la suite $(\sin(n\theta))$ converge si et seulement si la suite $(\cos(n\theta))$ converge, en considérant $\sin((n+1)\theta)$ et $\cos((n+1)\theta)$. Puis raisonner par l'absurde, en lien avec la suite $(e^{in\theta})$.
- Exercice 46.** Que dire de la fonction $a \mapsto \int_1^a \max\{x, a\} dx$?
- Exercice 50.** 2. Montrer que $x_{n+1}^n = 2x_n - 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 51 ●●○○

1. a. Montrer que l'équation $\ln x = -nx$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$, possède une et une seule solution x_n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.
b. Étudier la monotonie de la suite $(x_n)_{n \geq 0}$.
c. Étudier $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = nx_n$.
a. Étudier $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$.
b. Montrer que $y_n + \ln y_n = \ln n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n}{\ln n} = 1$.

Exercice 50 ●●○○ Mines-Ponts MP 2022

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation

$$x^n + x^{n-1} + \dots + x = 1,$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$, possède une et une seule solution x_n .

2. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.