

# 15 | Étude des suites numériques

Cahier de calcul : [fiche 24](#).

Banque CCINP : [exercice 40](#).

## — Exercice 1 •••• — Vrai ou Faux ?

1. Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ , alors  $(u_n)_{n \geq 0}$  n'est pas majorée.
2. Un produit de deux suites réelles minorées est minorée.
3. Une suite croissante à partir d'un certain rang est minorée.
4. Si  $(|u_n|)_{n \geq 0}$  converge, alors  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge.
5. Si  $(|u_n|)_{n \geq 0}$  tend vers 0, alors  $(u_n)_{n \geq 0}$  tend vers 0.
6. Une suite convergente est monotone à partir d'un certain rang.
7. Une suite convergente et majorée est croissante.
8. Une suite divergeant vers  $+\infty$  est croissante à partir d'un certain rang.
9. Si  $(u_n)_{n \geq 0}$  est croissante et  $u_n \leq v_n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , alors  $(v_n)_{n \geq 0}$  est croissante.
10. Si  $(u_n)_{n \geq 0}$  est divergente, alors la suite définie par  $v_n = u_{n+1} - u_n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , est divergente.
11. Si  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $\ell \neq 0$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ .
12. Une somme de suites croissantes est croissante.
13. Un produit de suites croissantes est croissante.

## Limites

## — Exercice 2 •••• —

Dans chacun des cas suivants, étudier la limite de la suite de terme général

1.  $\frac{n^4 - 1}{n^3 + 2n + 1}$ .
2.  $\frac{\sqrt{n + \sin n}}{n^2 - n}$ .
3.  $\frac{n + (-1)^n \sqrt{n}}{2n + 1}$ .
4.  $\frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n}$ .
5.  $\frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^{n+1}}$ .
6.  $\frac{n!}{n^n}$ .
7.  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ .
8.  $\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \lfloor kx \rfloor$  ( $x \in \mathbb{R}$ ).
9.  $\frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n k!$ .
10.  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k^2}$ .
11.  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$ .
12.  $\sqrt{e^n + 2^n} - \sqrt{e^n + 1}$ .

## — Exercice 3 •••• —

Soit  $q > 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ .  
Étudier la convergence de la suite  $\left( \frac{q^n + n^\alpha}{1 + \ln^\beta n} \right)_{n \geq 0}$  en fonction de  $q$ ,  $\alpha$  et  $\beta$ .

## — Exercice 4 •••• —

Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite à termes strictement positifs et  $\ell \in \mathbb{R}$ . On suppose que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ .

1. Montrer que si  $\ell < 1$  (resp.  $\ell > 1$ ) la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge vers 0 (resp. diverge vers  $+\infty$ ).
2. Que peut-on dire si  $\ell = 1$ .
3. **Application.** Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!}$ , avec  $x \in \mathbb{R}_+^*$  fixé, et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n!}$ .

## Suites adjacentes

## — Exercice 5 •••• — Série harmonique (alternée)

Soit les suites  $(h_n)_{n \geq 1}$  et  $(H_n)_{n \geq 1}$  définies, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , par

$$h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad H_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}.$$

1. a. Justifier que la suite  $(h_n)_{n \geq 1}$  est croissante.  
b. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $h_{2n} - h_n \geq \frac{1}{2}$ .  
c. En déduire que la suite  $(h_n)_{n \geq 1}$  diverge vers  $+\infty$ .
2. On introduit les suites  $(u_n)_{n \geq 2}$  et  $(v_n)_{n \geq 2}$  définies, pour tout  $n \geq 2$ , par

$$u_n = h_n - \ln n \quad \text{et} \quad v_n = h_{n-1} - \ln n.$$

3. a. Montrer que les suites  $(u_n)_{n \geq 2}$  et  $(v_n)_{n \geq 2}$  convergent vers une limite commune, notée  $\gamma^+$ . (Indication : on pourra utiliser une majoration classique de  $\ln(1+x)$ .)  
b. Retrouver la divergence de la suite  $(h_n)_{n \geq 1}$ .  
c. Quelle information supplémentaire obtient-on quant à la divergence de la suite  $(h_n)_{n \geq 1}$  ?
4. Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite décroissante de limite nulle. On pose  $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .  
a. Montrer que les suites  $(S_{2n})_{n \geq 0}$  et  $(S_{2n+1})_{n \geq 0}$  sont adjacentes.  
b. En déduire que la suite  $(S_n)$  converge.  
4. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n$ . (On pourra s'aider de la suite  $(h_n)_{n \geq 1}$  et de la question 2.a.)

— **Exercice 6** ••○ — Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Montrer que les suites  $(u_n)_{n \geq 1}$  et  $(v_n)_{n \geq 1}$  sont adjacentes.

— **Exercice 7** ••○ — **Irrationalité de e**

Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  et  $(v_n)_{n \geq 1}$  les suites définies, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , par

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

1. Montrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes.

*On admet que leur limite commune est e.*

2. En déduire que e est un nombre irrationnel.

— **Exercice 8** ••○ — Soit a et b deux réels tels que  $0 < a < b$ .

On définit deux suites  $(a_n)_{n \geq 0}$  et  $(b_n)_{n \geq 0}$  en posant  $a_0 = a$ ,  $b_0 = b$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{b_n a_{n+1}}.$$

1. Montrer que les suites  $(a_n)_{n \geq 0}$  et  $(b_n)_{n \geq 0}$  sont adjacentes.

2. a. Justifier l'existence d'un réel  $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$  tel que  $\cos \alpha = \frac{a}{b}$ .

b. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = b_n \cos \frac{\alpha}{2^n}$ , puis  $b_n = \frac{b \sin \alpha}{2^n \sin \frac{\alpha}{2^n}}$ .

c. En déduire la limite commune des deux suites.

## Exercices epsilonesques

— **Exercice 9** •○○ —

Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite réelle positive telle que l'ensemble  $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n > 10^{-k}\}$  soit fini, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Montrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge vers 0.

— **Exercice 10** •○○ —

Montrer que toute suite convergente à valeurs dans  $\mathbb{Z}$  est stationnaire.

†. Ce réel  $\gamma$  est appelé *constante d'Euler-Mascheroni*. Il vaut approximativement 0,577 215 et on ne sait toujours pas en 2026 si ce réel est rationnel ou non.

— **Exercice 11** •○○ — Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  et  $(v_n)_{n \geq 0}$  deux suites réelles convergentes. Étudier  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \max\{u_n, v_n\}$  de deux manières différentes.

1. En commençant par chercher une expression simple de  $\max\{x, y\}$  en fonction de  $x$  et  $y$ , pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$ . (Indication : on pourra s'aider de la valeur absolue.)
2. En revenant à la définition de la limite.

— **Exercice 12** •○○ — Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite réelle.

On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $e_n = \lfloor u_n \rfloor$ . Étudier  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n$  dans chacun des cas suivants :

1.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .
2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ .
3.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \in \mathbb{Z}$ .

— **Exercice 13** •○○ — **Théorème de Cesàro**

Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  une suite de réels et  $(v_n)_{n \geq 1}$  la suite définie par

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k.$$

1. On suppose que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  converge vers 0. Soit  $\varepsilon > 0$  et  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  tels que, pour tout  $n \geq n_0$ ,  $|u_n| \leq \varepsilon$ .

a. Montrer que, pour tout  $n \geq n_0$ , on a  $|v_n| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0-1} |u_k| + \varepsilon$ .

- b. En déduire que la suite  $(v_n)_{n \geq 1}$  converge vers 0.  
c. Que dire de la réciproque ?

2. Déduire de la question précédente que si la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  converge vers  $\ell$ , il en va alors de même de la suite  $(v_n)_{n \geq 1}$ . (Théorème de Cesàro)

3. Étudier le cas où la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  diverge vers  $\pm\infty$ .

4. Montrer que les réciproques de 2. et 3. sont vraies dans le cas où  $(u_n)_{n \geq 1}$  est croissante.

— **Exercice 14** •○○ — **Lemme de l'escalier**

Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite réelle et  $\ell \in \mathbb{R}$ .

1. Démontrer, à l'aide du théorème de Cesàro, que si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = \ell$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = \ell$ . (Lemme de l'escalier).
2. En déduire que si  $(u_n)_{n \geq 0}$  est une suite à termes strictement positifs telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$ .
3. Déterminer la limite de la suite de terme général  $\left(\frac{2n}{n}\right)^{1/n}$ .

**Exercice 15 •••** Soit  $(a_n)_{n \geq 0}$  et  $(b_n)_{n \geq 0}$  deux suites réelles convergentes de limites respectives  $a$  et  $b$ . Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = ab.$$

**Exercice 16 •••** **Mines-Ponts MP 2022** Soit  $(a_n)_{n \geq 0}$  une suite réelle et  $(b_n)_{n \geq 0}$  une suite strictement croissante non majorée d'éléments de  $\mathbb{R}_+^*$ .

1. On suppose que  $(a_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $\ell$ . Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{b_n} \sum_{k=0}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) a_k = \ell.$$

2. On suppose que  $\left( \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \right)_{n \geq 0}$  converge vers  $\ell$ . Que dire de  $\left( \frac{a_n}{b_n} \right)_{n \geq 0}$  ?

**Exercice 17 •••** **Lemme sous-additif de Fekete**

Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite réelle sous-additive, i.e. pour laquelle

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, \quad u_{m+n} \leq u_m + u_n.$$

On pose  $A = \left\{ \frac{u_n}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$ .

1. On suppose  $A$  minoré et on pose  $a = \inf A$ .

a. Soient  $n, N \in \mathbb{N}^*$ . La division euclidienne de  $n$  par  $N$  s'écrit  $n = Nq + r$  pour certains  $q \in \mathbb{N}$  et  $r \in [0, N-1]$ . Montrer que :  $\frac{u_n}{n} \leq \frac{u_N}{N} + \frac{u_r}{n}$ .

b. En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = a$ .

2. Si  $A$  n'est pas minoré, montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = -\infty$ .

En résumé, la suite  $\left( \frac{u_n}{n} \right)_{n \geq 0}$  possède toujours une limite (*lemme sous-additif de Fekete*).

## Caractérisation séquentielle

**Exercice 18 •••** Soit  $A$  et  $B$  deux parties non vides de  $\mathbb{R}$ .

On suppose que  $A$  et  $B$  sont adjacentes, i.e.

$$\forall (a, b) \in A \times B, \quad a \leq b \quad \text{et} \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists (a, b) \in A \times B, \quad b - a < \varepsilon.$$

Montrer qu'alors  $\sup A = \inf B$ .

**Exercice 19 •••**  Déterminer les bornes inférieure et supérieure des parties suivantes.

- a.  $\left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} \right\}_{n \geq 1}$ .    b.  $\left\{ \frac{1}{p-q} \right\}_{p,q \in \mathbb{Z}, p \neq q}$ .    c.  $\left\{ \frac{(-1)^k k}{k+1} \right\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ .  
 d.  $\left\{ \frac{pq}{p^2 + q^2} \right\}_{p,q \in \mathbb{N}^*}$ .    e.  $\left\{ \frac{p + \sqrt{q}}{\sqrt{p} + q} \right\}_{p,q \in \mathbb{N}^*}$ .

**Exercice 20 •••**

On considère deux suites  $(u_n)_{n \geq 0}$  et  $(v_n)_{n \geq 0}$  qui divergent vers  $+\infty$  et telles que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0.$$

On fixe  $\varepsilon > 0$  et on considère un rang  $n_0$  à partir duquel  $|u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon$ .

1. Montrer que, pour tout réel  $x$  tel que  $x \geq u_{n_0}$ , il existe un terme  $u_p$  de la suite tel que  $|u_p - x| \leq \varepsilon$ .
2. a. Montrer que, pour tout réel  $x$ , il existe  $(n, p) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $|u_p - v_n - x| \leq \varepsilon$ .  
 b. En déduire la densité de l'ensemble  $\{u_m - v_n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$  dans  $\mathbb{R}$ .
3. **Application.** Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite vérifiant les deux hypothèses qui précèdent. Montrer que  $\{u_n - \lfloor u_n \rfloor \mid n \in \mathbb{N}\}$  est dense dans  $[0, 1]$ .

## Suites complexes

**Exercice 21 •••**

1. a. Soit  $(r_n)_{n \geq 0}$  et  $(\theta_n)_{n \geq 0}$  deux suites réelles convergentes. Étudier  $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n e^{i\theta_n}$ .  
 b. Soit  $(z_n)_{n \geq 0}$  une suite complexe convergente. Étudier  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n|$ .
2. Soit  $(z_n)_{n \geq 0}$  une suite complexe convergente de limite 1.
  - Montrer que, pour tout  $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ,  $|\sin x| \geq \frac{2}{\pi} |x|$ .
  - En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \arg(z_n)$ .
3. Soit  $(z_n)$  une suite complexe convergente de limite non nulle. Étudier  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \arg(z_n)$ .

— **Exercice 22** ••○ — Soit  $(z_n)_{n \geq 0}$  une suite complexe telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n^2 = 1$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |z_{n+1} - z_n| < 1.$$

1. Montrer qu'il existe un rang  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall n \geq N, \quad |z_n - 1| \leq \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad |z_n + 1| \leq \frac{1}{2}.$$

2. En déduire que la suite  $(z_n)_{n \geq 0}$  converge.

— **Exercice 23** ••○ —  Soit  $(z_n)_{n \geq 0}$  une suite complexe pour laquelle, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$ . Étudier la convergence de  $(z_n)_{n \geq 0}$  et sa limite éventuelle.

## Suites extraites

— **Exercice 24** •○○ —

- Montrer que la relation « la suite  $(v_n)_{n \geq 0}$  est une sous-suite de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  » est une relation d'ordre sur l'ensemble des suites.
- Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite numérique. Parmi les suites suivantes, trouver celles qui sont extraites d'une autre :

$$(u_{3n})_{n \geq 0}, (u_{6n})_{n \geq 0}, (u_{2n})_{n \geq 0}, (u_{3 \cdot 2^n})_{n \geq 0}, (u_{3 \cdot 2^{n+1}})_{n \geq 0}, (u_{2^n})_{n \geq 0} \text{ et } (u_{2^{n+1}})_{n \geq 0}.$$

— **Exercice 25** •○○ —

Que peut-on dire d'une suite réelle croissante qui admet

- une suite extraite convergente ?
- une suite extraite majorée ?

— **Exercice 26** •○○ — On considère une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  croissante qui vérifie

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad |u_{2^{p+1}} - u_{2^p}| \leq \frac{1}{2^p}.$$

Montrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est convergente.

— **Exercice 27** •○○ —

Montrer qu'une suite non majorée admet une suite extraite qui diverge vers  $+\infty$ .

— **Exercice 28** •○○ — Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite réelle. Montrer que  $(u_n)_{n \geq 0}$  est convergente dans les deux cas suivants :

- $(u_n)_{n \geq 0}$  est croissante et  $(u_{2n})_{n \geq 0}$  convergente.
- $(u_{2n})_{n \geq 0}$ ,  $(u_{2n+1})_{n \geq 0}$  et  $(u_{3n})_{n \geq 0}$  convergent.

— **Exercice 29** •○○ —

Dans chacun des cas suivants, montrer que la suite en jeu n'a pas de limite.

- Pour tout  $n \geq 2$ ,  $u_n$  est l'inverse du nombre de diviseurs premiers distincts de  $n$ .
- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \sin\left(\frac{n^2\pi}{3}\right)$ .

— **Exercice 30** •○○ —

Montrer que  $[-1, 1]$  est l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite  $(\cos(\ln n))_{n \geq 1}$ .

— **Exercice 31** •○○ —  On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ .

- Étudier  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n^2+n}$ . En déduire que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  n'a pas de limite.
- Soit  $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$  avec  $a \leq b$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{b^2 n^2 + 2an} = \frac{a}{b}$ .
- Montrer que tout élément de  $[0, 1]$  est la limite d'une certaine suite extraite de  $(u_n)_{n \geq 0}$ .

— **Exercice 32** •○○ —  On admet l'irrationalité de  $\pi$ .

Montrer que la suite  $(\tan n)_{n \geq 0}$  est bien définie et n'a pas de limite.

— **Exercice 33** •○○ —  Soit  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ .

Montrer qu'aucune des deux suites  $(\sin(n\theta))_{n \geq 0}$  et  $(\cos(n\theta))_{n \geq 0}$  n'a de limite.

— **Exercice 34** •○○ —  **Mines-Ponts MP 2022**

- Montrer que tout sous-groupe de  $(\mathbb{R}, +)$  est soit de la forme  $a\mathbb{Z}$ , pour  $a \in \mathbb{R}_+$ , soit dense dans  $\mathbb{R}$ .

Dans la suite de l'exercice, on fixe un réel  $\theta$  tel que  $\theta/\pi \notin \mathbb{Q}$ .

- Montrer que  $\theta\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .
- Déterminer les valeurs d'adhérence de la suite  $(\cos(n\theta))_{n \geq 0}$ .
- Déterminer les valeurs d'adhérence de la suite  $(\cos(\sqrt{n}\theta))_{n \geq 0}$ .

**Exercice 35 ••••** Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite complexe pour laquelle

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{u_n}{2^n}.$$

On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $m_n = \max\{|u_n|, |u_{n+1}|\}$ .

1. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $m_{n+1} \leq \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)m_n$ .
2. En déduire que  $m_n \leq e^2 m_0$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , puis que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une fonction  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante pour laquelle la suite  $(u_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$  converge.
3. Déterminer un réel positif  $a$  pour lequel, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_{\varphi(n)} - u_n| \leq \frac{a}{2^n}$ .
4. En déduire que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge.

**Exercice 36 ••••**

1. Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite complexe bornée. On suppose que  $(u_n)_{n \geq 0}$  possède au plus une valeur d'adhérence. Montrer que  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge.
2. Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite complexe bornée pour laquelle  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3u_n + u_{2n}) = 1$ .
  - a. Que vaut la limite de  $(u_n)_{n \geq 0}$  si elle converge ?
  - b. Soit  $\ell_0$  une valeur d'adhérence de  $(u_n)_{n \geq 0}$ . On note  $\varphi$  une fonction strictement croissante de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  pour laquelle  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\varphi(n)} = \ell_0$ .
    - (i) Montrer que la suite  $(u_{2^k \varphi(n)})_{n \geq 0}$  possède une limite  $\ell_k \in \mathbb{C}$ , pour  $k \in \mathbb{N}$ .
    - (ii) Déterminer une expression explicite de  $\ell_k$  en fonction de  $k$ , pour  $k \in \mathbb{N}$ .
    - (iii) Montrer que la suite  $(\ell_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est borné, puis en déduire  $\ell_0$ .
  - c. En déduire que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge.

**Suites récurrentes linéaires****Exercice 37 ••••**  Pour chacune des suites suivantes définies par récurrence, donner une expression du terme général en fonction de  $n$ .

1.  $\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{e^2}. \end{cases}$
2.  $\begin{cases} u_0 = -2, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} + u_n = \pi. \end{cases}$
3.  $\begin{cases} u_0 = 4, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{3u_n - 2}{5}. \end{cases}$
4.  $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 2, \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1}. \end{cases}$
5.  $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = \frac{2}{3}, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + 4u_n = 2u_{n+1}. \end{cases}$
6.  $\begin{cases} u_0 = -1, u_1 = 1, u_2 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 7u_{n+1}. \end{cases}$

**Exercice 38 ••••** 

Explicitier en fonction de  $n$  le terme général de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par

1.  $\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2u_n^2. \end{cases}$
2.  $\begin{cases} u_0 = 1, \quad u_1 = 2, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^6}{u_n^5}. \end{cases}$

**Exercice 39 ••••**  Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + (-1)^n.$$

1. Déterminer  $\alpha$  pour que la suite  $(s_n)_{n \geq 0}$  définie, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par  $s_n = \alpha n(-1)^n$  vérifie la même relation de récurrence que  $(u_n)_{n \geq 0}$ .
2. En déduire une expression de  $u_n$  en fonction de  $u_0$ ,  $u_1$  et  $n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Suites récurrentes «  $u_{n+1} = f(u_n)$  »****Exercice 40 ••••**  **Banque d'exercices CCINP 2025 (43)**

1. Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ . On définit la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  par

$$u_0 = x_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \text{Arctan}(u_n).$$

- a. Démontrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de  $x_0$ , le sens de variation de  $(u_n)_{n \geq 0}$ .
- b. Montrer que  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions  $h$ , continues sur  $\mathbb{R}$ , telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = h(\text{Arctan } x).$$

— **Exercice 41** ••○ — Dans chacune des situations suivantes, déterminer les variations de la fonction sous-jacente, la position de son graphe par rapport à la droite d'équation  $y = x$  ainsi que quelques domaines stables intéressants, puis étudier en fonction de  $u_0$  la nature de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par

1.  $u_{n+1} = u_n - \ln u_n.$
2.  $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}.$
3.  $u_{n+1} = 1 + \ln u_n.$
4.  $u_{n+1} = 1 + \frac{u_n^2}{4}.$
5. (•••)  $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + u_n}{2}.$
6. (•••)  $u_{n+1} = \left| u_n^2 - \frac{1}{4} \right|.$

— **Exercice 42** ••○ — On note  $f$  la fonction  $x \mapsto \sqrt{2-x}$  sur  $]-\infty, 2]$ .

1. Pour quelles valeurs de  $u_0$  peut-on définir une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  par la relation  $u_{n+1} = f(u_n)$  ?

On suppose désormais que  $u_0$  a une telle valeur.

2. a. Déterminer les points fixes de  $f$  et montrer qu'ils sont points fixes de  $f \circ f$ .  
b. Montrer que les points fixes de  $f \circ f$  sont racines d'un polynôme  $P$  de degré 4  
c. Vérifier que  $P$  admet  $-2$  pour racine et en déduire les points fixes de  $f \circ f$ .
3. Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et préciser sa limite.

— **Exercice 43** ••○ — Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite. On suppose  $u_0 > 0$  et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^n u_k}.$$

1. Exprimer  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .
2. Étudier  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .
3. Étudier  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n)$ , puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n}$  grâce au théorème de Cesàro.

— **Exercice 44** ••○ — Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite. On suppose  $u_0 > 0$  et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}.$$

1. Étudier  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .
2. On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $v_n = e^{u_n}$ .
  - a. Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_{n+1} - v_n) = 1$ .
  - b. En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\ln n}$ , grâce au théorème de Cesàro.

— **Exercice 45** ••○ — Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  la suite éventuellement définie par la donnée de  $u_0 > 0$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la relation  $u_{n+1} = 2 + \ln u_n$ .

1. On note  $f$  l'application  $x \mapsto 2 + \ln x$ . Montrer que l'équation  $f(x) = x$  possède deux solutions  $\alpha$  et  $\beta$ . Étudier le signe de  $f(x) - x$ .
2. Étudier le comportement de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  selon les valeurs de  $u_0$ .

— **Exercice 46** ••○ — X MP 2022

Étudier la convergence des suites réelles  $(u_n)_{n \geq 0}$  et  $(v_n)_{n \geq 0}$  vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \int_0^1 \max\{x, v_n\} dx \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \int_0^1 \max\{x, u_n\} dx.$$

## Suites définies implicitement

— **Exercice 47** ••○ — Soient  $I$  un intervalle et  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite de fonctions de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ . On suppose que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

- l'équation  $f_n(x) = 0$  d'inconnue  $x \in I$  possède une et une seule solution  $x_n$  ;
- la fonction  $f_n$  est strictement croissante sur  $I$  ;
- pour tout  $x \in I$  :  $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ .

1. Conjecturer, à partir d'un dessin, le sens de monotonie de la suite  $(x_n)_{n \geq 0}$ .
2. Prouver proprement cette conjecture.

— **Exercice 48** ••○ — Soit  $n \geq 2$  et  $f_n$  la fonction définie sur  $[1, +\infty[$  par

$$f_n(x) = x^n - x - 1.$$

1. Montrer qu'il existe un unique  $x_n > 1$  tel que  $f_n(x_n) = 0$ .
2. Montrer que la suite  $(x_n)_{n \geq 2}$  est décroissante et qu'elle converge vers une limite  $\ell$ , que l'on déterminera.

— **Exercice 49** ••○ —

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'équation  $x^n = \cos x$  d'inconnue  $x \in [0, 1]$  possède une et une seule solution  $x_n$ .
2. Montrer que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et préciser sa limite.

**Exercice 50** Mines-Ponts MP 20221. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'équation

$$x^n + x^{n-1} + \dots + x = 1,$$

d'inconnue  $x \in \mathbb{R}_+$ , possède une et une seule solution  $x_n$ .2. Montrer que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et préciser sa limite.**Exercice 51**

1. a. Montrer que l'équation  $\ln x = -nx$ , d'inconnue  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , possède une et une seule solution  $x_n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .  
 b. Etudier la monotonie de la suite  $(x_n)_{n \geq 0}$ .  
 c. Étudier  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ .

2. On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $y_n = nx_n$ .a. Étudier  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$ .b. Montrer que  $y_n + \ln y_n = \ln n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , puis que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n}{\ln n} = 1$ .

**Exercice 46.** Que dire de la fonction  $a \mapsto \int_1^a \max\{x, a\} dx$  ?

**Exercice 47.** Raisonnez par l'absurde, en lien avec la suite  $(e_n)$ .

**Exercice 33.** On pourra commencer par établir que la suite  $(\sin(n\theta))$  converge si et seulement si la suite  $(\cos(n\theta))$  converge, en considérant  $\sin((n+1)\theta)$  et  $\cos((n+1)\theta)$ . Puis raisonnez par l'absurde, en lien avec la suite  $(e_n)$ .

**Exercice 32.** Raisonnez par l'absurde et utilisez les formules de trigonométrie.

**Exercice 31.** 2. Montrer que  $\lfloor \sqrt{b^2 n^2 + 2an} \rfloor = bn$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 7.** Raisonnez par l'absurde et exploitez l'encadrement  $u_n < e < v_n$ .

**Exercice 2.** 9. On pourra isoler les deux dernières termes de la somme.

**Indications**

- Exercice 48.** 2.  $\ell = 1$ .  
**Exercice 49.** 2.  $\lim x_n = 1$ .  
**Exercice 50.** 3.  $\lim x_n = 1/2$ .

**Exercice 46.** Si  $u_0 = a \ll 1$ , les deux suites sont égales à  $a$ . Sinon, chaque des deux suites converge (vers 1) si et seulement si  $u_0 \leq 1$  et  $v_0 \leq 1$ .  
**Exercice 40.** 1.b.  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge vers 0. 2. Les fonctions constantes.

**Exercice 39.** 1.  $\alpha = \frac{1}{3}$ . 2.  $u_n = \frac{9}{1}[(3u_0 + 3u_1 + 1)2^n + (3n + 6u_0 - 3u_1 - 1)(-1)^n]$ .

**Exercice 38.** 1.  $u_n = 2^{2n-1}$ . 2.  $u_n = \frac{2}{1}(-1)^{n-1}$ .

**Exercice 37.** 1.  $u_n = e^{-2n}$ . 2.  $u_n = -\frac{4}{1}(-1)^n + \frac{2}{1}$ . 3.  $u_n = 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n - 1$ .

**Exercice 34.** 3.  $[-1, 1]$ . 4.  $[-1, 1]$ .

**Exercice 25.** Dans les deux cas la suite converge.

**Exercice 23.** La suite  $(z_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $\begin{cases} 0 & \text{si } z_0 \in \mathbb{R}^- \\ z_0 & \text{si } z_0 \in \mathbb{R}^+ \\ \frac{|z_0| \sin(\arg z_0)}{\arg z_0} & \text{si } z_0 \in \mathbb{C}^+ \end{cases}$  sinon.

**Exercice 19.** a.  $-1 \text{ et } \frac{3}{2}$ . b.  $-1 \text{ et } 1$ . c.  $-1 \text{ et } 1$ . d.  $0 \text{ et } \frac{1}{2}$ . e.  $0 \text{ et } +\infty$ .

**Exercice 14.** 3. 4.

**Exercice 12.** 1.  $+\infty$ . 2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ . 3. Pas de limite en général.

**Exercice 5.** 4.  $-\ln 2$ .  
**Exercice 8.** 2.c.  $\frac{\sin a}{a}$ .

**Exercice 4.** 2. Rien. 3.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

**Exercice 3.**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n + n^a}{1 + \ln y_n} = \begin{cases} +\infty & \text{si } y < 1 \text{ et } a > 0 \\ 0 & \text{si } y < 1 \text{ et } a = 0 \\ 1 & \text{si } y < 0 \text{ et } (y < 1 \text{ et } a = 0) \text{ ou } (y = 1 \text{ et } a \leq 0) \\ 2 & \text{si } y = 1 \text{ et } a = 0 \text{ et } \beta < 0 \\ 1 & \text{si } y = 1 \text{ et } a = 0 \text{ et } \beta > 0 \end{cases}$

**Exercice 2.** 1.  $+\infty$ . 2. 0. 3.  $\frac{1}{2}$ . 4. 0. 5.  $-\frac{1}{3}$ . 6. 0. 7.  $+\infty$ . 8.  $\frac{x}{2}$ . 9. 1. 10. 0. 11. 1. 12.  $+\infty$ .

**Exercice 13.** Faux :  $u_n = n$  et  $v_n = -1$ .

**Exercice 9.** Faux :  $u_n = n$  et  $v_n = n + 1 + (-1)^n$ . 10. Faux :  $(u_n)_{n \geq 0}$ . 11. Vrai. 12. Vrai.

**Exercice 5.** Vrai. 6. Faux :  $\left(\frac{n}{(-1)^n}\right)$ . 7. Faux : idem e. 8. Faux :  $(n + (-1)^n)_{n \geq 0}$ .

**Exercice 1.** 1. Vrai. 2. Faux :  $(u_n)_{n \geq 0}$  et  $(-1)^n u_n = 0$ . 3. Vrai. 4. Faux :  $((-1)^n)_{n \geq 0}$ .