15 | Étude des suites numériques

Cahier de calcul : fiche 24. **Banque CCINP :** exercice 40.

Exercice 1 ●○○○ **Vrai ou Faux ?**

1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas majorée.
2. Un produit de deux suites réelles minorées est minorée.
3. Une suite croissante à partir d'un certain rang est minorée.
4. Si $(|u_n|)_{n\geqslant 0}$ converge, alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge.
5. Si $(|u_n|)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0, alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0.
6. Une suite convergente est monotone à partir d'un certain rang.
7. Une suite convergente et majorée est croissante.
8. Une suite divergeant vers $+\infty$ est croissante à partir d'un certain rang.
9. Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et $u_n \leqslant v_n$, pour tout $n\in\mathbb{N}$, alors $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.
10. Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est divergente, alors la suite définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, est divergente.
11. Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\ell \neq 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.
12. Une somme de suites croissantes est croissante.
13. Un produit de suites croissantes est croissante.

Limites

Exercice 2 ●●○○ Dans chacun des cas suivants, étudier la limite de la suite de terme général :

1. $\dfrac{n^4-1}{n^3+2n+1}$.
2. $\dfrac{\sqrt{n+\sin n}}{n^2-n}$.
3. $\dfrac{n+(-1)^n\sqrt{n}}{2n+1}$.
4. $\dfrac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n}$.
5. $\dfrac{2^n-3^n}{2^n+3^{n+1}}$.
6. $\dfrac{n!}{n^n}$.
7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$.
8. $\displaystyle\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\lfloor kx\rfloor$ $(x\in\mathbb{R})$.
9. $\displaystyle\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}k!$.
10. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+k^2}$.
11. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.
12. $\sqrt{e^n+2^n}-\sqrt{e^n+1}$.

Exercice 3 ●●○○ Soit $q>0$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\beta\in\mathbb{R}$. Étudier la convergence de la suite $\left(\dfrac{q^n+n^\alpha}{1+\ln^\beta n}\right)_{n\geqslant 0}$ en fonction de q, α et β.

Exercice 4 ●●○○ Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite à termes strictement positifs et $\ell\in\mathbb{R}$. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\ell$.

1. Montrer que si $\ell<1$ (resp. $\ell>1$) la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0 (resp. diverge vers $+\infty$).
2. Que peut-on dire si $\ell = 1$.
3. **Application.** Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^n}{n!}$, avec $x\in\mathbb{R}_+^*$ fixé, et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^n}{n!}$.

Suites adjacentes

Exercice 5 ●●○○ **Série harmonique (alternée)**
Soit les suites $(h_n)_{n\geqslant 1}$ et $(H_n)_{n\geqslant 1}$ définie, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, par

$$h_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\quad\text{et}\quad H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}.$$

1. **a.** Justifier que la suite $(h_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.
   b. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $h_{2n}-h_n\geqslant\dfrac{1}{2}$.
   c. En déduire que la suite $(h_n)_{n\geqslant 1}$ diverge vers $+\infty$.
2. On introduit les suites $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et $(v_n)_{n\geqslant 2}$ définies, pour tout $n\geqslant 2$, par
$$u_n = h_n - \ln n\quad\text{et}\quad v_n = h_{n-1}-\ln n.$$
   a. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et $(v_n)_{n\geqslant 2}$ convergent vers une limite commune, notée $\gamma^\dagger$. *(Indication : on pourra utiliser une majoration classique de* $\ln(1+x)$.*)*
   b. Retrouver la divergence de la suite $(h_n)_{n\geqslant 1}$.
   c. Quelle information supplémentaire obtient-on quant à la divergence de la suite $(h_n)_{n\geqslant 1}$?
3. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite décroissante de limite nulle. On pose $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$, pour $n\in\mathbb{N}$.
   a. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\geqslant 0}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes.
   b. En déduire que la suite (S_n) converge.
4. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n$. *(On pourra s'aider de la suite* $(h_n)_{n\geqslant 1}$ *et de la question* **2.a.***)*

Exercice 6 ●●○○ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \qquad \text{et} \qquad v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.

Exercice 7 ●●○○ Irrationalité de e

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ les suites définies, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
   On admet que leur limite commune est e.
2. En déduire que e est un nombre irrationnel.

Exercice 8 ●●○○ Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On définit deux suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ en posant $a_0 = a$, $b_0 = b$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = \sqrt{b_n a_{n+1}}.$$

1. Montrer que les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes.
2. **a.** Justifier l'existence d'un réel $\alpha \in \left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\cos\alpha = \dfrac{a}{b}$.
   b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n \cos\dfrac{\alpha}{2^n}$, puis $b_n = \dfrac{b\sin\alpha}{2^n \sin\frac{\alpha}{2^n}}$.
   c. En déduire la limite commune des deux suites.

Exercices epsilonesques

Exercice 9 ●○○○

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle positive telle que l'ensemble $\left\{n \in \mathbb{N} \;\middle|\; u_n > 10^{-k}\right\}$ soit fini, pour tout $k \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.

Exercice 10 ●●○○

Montrer que toute suite convergente à valeurs dans $\mathbb{Z}$ est stationnaire.

†. Ce réel γ est appelé *constante d'Euler-Mascheroni*. Il vaut approximativement $0,577\,215$ et on ne sait toujours pas en 2025 si ce réel est rationnel ou non.

Exercice 11 ●○○○ Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites réelles convergentes. Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} \max\{u_n, v_n\}$ de deux manières différentes.

1. En commençant par chercher une expression simple de $\max\{x, y\}$ en fonction de x et y, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. *(Indication : on pourra s'aider de la valeur absolue.)*
2. En revenant à la définition de la limite.

Exercice 12 ●●●○ Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_n = \lfloor u_n \rfloor$. Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} e_n$ dans chacun des cas suivants :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. **2.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. **3.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 13 ●●●○ Théorème de Cesàro

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

1. On suppose que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0. Soit $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tels que, pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n| \leqslant \varepsilon$.
   a. Montrer que, pour tout $n \geqslant n_0$, on a $|v_n| \leqslant \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0-1} |u_k| + \varepsilon$.
   b. En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.
   c. Que dire de la réciproque ?
2. Déduire de la question précédente que si la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers ℓ, il en va alors de même de la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$. *(Théorème de Cesàro)*
3. Étudier le cas où la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ diverge vers $\pm\infty$.
4. Montrer que les réciproques de **2.** et **3.** sont vraies dans le cas où $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

Exercice 14 ●●○○ Lemme de l'escalier

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Démontrer, à l'aide du théorème de Cesàro, que si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = \ell$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = \ell$. *(Lemme de l'escalier).*
2. En déduire que si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite à termes strictement positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$.
3. Déterminer la limite de la suite de terme général $\dbinom{2n}{n}^{1/n}$.

Exercice 15 ●●●○ Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites réelles convergentes de limites respectives a et b. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = ab.$$

Exercice 16 ●●●○ **Mines-Ponts MP 2022** Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ une suite strictement croissante non majorée d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$.

1. On suppose que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers ℓ. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{b_n}\sum_{k=0}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)a_k = \ell.$$

2. On suppose que $\left(\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\right)_{n\geqslant 0}$ converge vers ℓ. Que dire de $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)_{n\geqslant 0}$?

Exercice 17 ●●●○ **Lemme sous-additif de Fekete**

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle sous-additive, i.e. pour laquelle

$$\forall m,n\in\mathbb{N},\quad u_{m+n}\leqslant u_m+u_n.$$

On pose $A=\left\{\frac{u_n}{n}\mid n\in\mathbb{N}^*\right\}$.

1. On suppose A minoré et on pose $a=\inf A$.

- **a.** Soient $n,N\in\mathbb{N}^*$. La division euclidienne de n par N s'écrit $n=Nq+r$ pour certains $q\in\mathbb{N}$ et $r\in[\![0,N-1]\!]$. Montrer que : $\dfrac{u_n}{n}\leqslant\dfrac{u_N}{N}+\dfrac{u_r}{n}$.
- **b.** En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n}=a$.

2. Si A n'est pas minoré, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n}=-\infty$.

En résumé, la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\geqslant 0}$ possède toujours une limite (*lemme sous-additif de Fekete*).

Caractérisation séquentielle

Exercice 18 ●●○○ Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On suppose que A et B sont adjacentes, *i.e.*

$$\forall(a,b)\in A\times B,\quad a\leqslant b \qquad\text{et}\qquad \forall\varepsilon>0,\quad \exists(a,b)\in A\times B,\quad b-a<\varepsilon.$$

Montrer qu'alors $\sup A=\inf B$.

Exercice 19 ●○○○ Déterminer les bornes inférieure et supérieure des parties suivantes :

a. $\left\{(-1)^n+\dfrac{1}{n}\right\}_{n\geqslant 1}$. **b.** $\left\{\dfrac{1}{p-q}\right\}_{p,q\in\mathbb{Z},p\neq q}$. **c.** $\left\{\dfrac{(-1)^k k}{k+1}\right\}_{k\in\mathbb{N}^*}$.

d. $\left\{\dfrac{pq}{p^2+q^2}\right\}_{p,q\in\mathbb{N}^*}$. **e.** $\left\{\dfrac{p+\sqrt{q}}{\sqrt{p}+q}\right\}_{p,q\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 20 ●●●○ On considère deux suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ qui divergent vers $+\infty$ et telles que

$$\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n)=0.$$

On fixe $\varepsilon>0$ et on considère un rang n_0 à partir duquel $|u_{n+1}-u_n|\leqslant\varepsilon$.

1. Montrer que, pour tout réel x tel que $x\geqslant u_{n_0}$, il existe un terme u_p de la suite tel que $|u_p-x|\leqslant\varepsilon$.

2.
- **a.** Montrer que, pour tout réel x, il existe $(n,p)\in\mathbb{N}^2$ tel que $|u_p-v_n-x|\leqslant\varepsilon$.
- **b.** En déduire la densité de l'ensemble $\{u_m-v_n\mid m,n\in\mathbb{N}\}$ dans $\mathbb{R}$.

3. Application. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant les deux hypothèses qui précèdent. Montrer que $\{u_n-\lfloor u_n\rfloor\mid n\in\mathbb{N}\}$ est dense dans $[0\,,1]$.

Suites complexes

Exercice 21 ●●○○

1.
- **a.** Soit $(r_n)_{n\geqslant 0}$ et $(\theta_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites réelles convergentes. Étudier $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} r_n e^{i\theta_n}$.
- **b.** Soit $(z_n)_{n\geqslant 0}$ une suite complexe convergente. Étudier $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}|z_n|$.

2. Soit $(z_n)_{n\geqslant 0}$ une suite complexe convergente de limite 1.
- **a.** Montrer que, pour tout $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $|\sin x|\geqslant\dfrac{2}{\pi}|x|$.
- **b.** En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\arg(z_n)$.

3. Soit (z_n) une suite complexe convergente de limite non nulle. Étudier $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\arg(z_n)$.

Exercice 22 ●●○○ Soit $(z_n)_{n\geqslant 0}$ une suite complexe telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n^2 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |z_{n+1} - z_n| < 1.$$

1. Montrer qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, n \geqslant N, \quad |z_n - 1| \leqslant \frac{1}{2} \ \text{ ou } \ |z_n + 1| \leqslant \frac{1}{2}.$$

2. En déduire que la suite $(z_n)_{n\geqslant 0}$ converge.

Exercice 23 ●●●○ Solt $(z_n)_{n\geqslant 0}$ une suite complexe pour laquelle, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{2}$. Étudier la convergence de $(z_n)_{n\geqslant 0}$ et sa limite éventuelle.

Suites extraites

Exercice 24 ●○○○

1. Montrer que la relation « la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est une sous-suite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ » est une relation d'ordre sur l'ensemble des suites.
2. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite numérique. Parmi les suites suivantes, trouver celles qui sont extraites d'une autre :

$$(u_{3n})_{n\geqslant 0},\ (u_{6n})_{n\geqslant 0},\ (u_{2n})_{n\geqslant 0},\ (u_{3\cdot 2^n})_{n\geqslant 0},\ (u_{3\cdot 2^{n+1}})_{n\geqslant 0},\ (u_{2^n})_{n\geqslant 0} \ \text{ et } \ (u_{2^{n+1}})_{n\geqslant 0}.$$

Exercice 25 ●○○○ Que peut-on dire d'une suite réelle croissante qui admet

1. une suite extraite convergente ?
2. une suite extraite majorée ?

Exercice 26 ●○○○ On considère une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ croissante qui vérifie

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad |u_{2^{p+1}} - u_{2^p}| \leqslant \frac{1}{2^p}.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente.

Exercice 27 ●●○○
Montrer qu'une suite non majorée admet une suite extraite qui diverge vers $+\infty$.

Exercice 28 ●○○○ Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente dans les deux cas suivants :

1. $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$ convergente.
2. $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$, $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ et $(u_{3n})_{n\geqslant 0}$ convergent.

Exercice 29 ●●○○
Dans chacun des cas suivants, montrer que la suite en jeu n'a pas de limite

1. Pour tout $n \geqslant 2$, u_n est l'inverse du nombre de diviseurs premiers distincts de n.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sin\left(\dfrac{n^2\pi}{3}\right)$.

Exercice 30 ●●●○
Montrer que $[-1\,,1]$ est l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\cos(\ln n))_{n\geqslant 1}$.

Exercice 31 ●●●○ On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor$.

1. Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n^2+n}$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'a pas de limite.
2. Soit $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ avec $a \leqslant b$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{b^2n^2+2an} = \dfrac{a}{b}$.
3. Montrer que tout élément de $[0\,,1]$ est la limite d'une certaine suite extraite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

Exercice 32 ●●●○ On admet l'irrationalité de π.
Montrer que la suite $(\tan n)_{n\geqslant 0}$ est bien définie et n'a pas de limite.

Exercice 33 ●●●○ Soit $\theta \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$.
Montrer qu'aucune des deux suites $(\sin(n\theta))_{n\geqslant 0}$ et $(\cos(n\theta))_{n\geqslant 0}$ n'a de limite.

Exercice 34 ●●●○ Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite complexe pour laquelle

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{u_n}{2^n}.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_n = \max\{|u_n|, |u_{n+1}|\}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_{n+1} \leqslant \left(1 + \dfrac{1}{2^n}\right) m_n$.
2. En déduire que $m_n \leqslant \mathrm{e}^2 m_0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée.

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante pour laquelle la suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\geqslant 0}$ converge.

3. Déterminer un réel positif a pour lequel, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|u_{\varphi(n)} - u_n\right| \leqslant \dfrac{a}{2^n}$.
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge.

Exercice 35 ●●●○

1. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite complexe bornée. On suppose que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ possède au plus une valeur d'adhérence. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge.
2. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite complexe bornée pour laquelle $\lim\limits_{n\to+\infty}(3u_n + u_{2n}) = 1$.
   a. Que vaut la limite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ si elle converge ?
   b. Soit ℓ_0 une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\geqslant 0}$. On note φ une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ pour laquelle $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = \ell_0$.
      (i) Montrer que la suite $\left(u_{2^k\varphi(n)}\right)_{n\geqslant 0}$ possède une limite $\ell_k \in \mathbb{C}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
      (ii) Déterminer une expression explicite de ℓ_k en fonction de k, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
      (iii) Montrer que la suite $(\ell_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est borné, puis en déduire ℓ_0.
   c. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge.

Exercice 36 ●●●○ — Mines-Ponts MP 2022

1. Montrer que tout sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ est soit de la forme $a\mathbb{Z}$, pour $a \in \mathbb{R}_+$, soit dense dans $\mathbb{R}$.

Dans la suite de l'exercice, on fixe un réel θ tel que $\theta/\pi \notin \mathbb{Q}$.

2. Montrer que $\theta\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
3. Déterminer les valeurs d'adhérence de la suite $(\cos(n\theta))_{n\geqslant 0}$.
4. Déterminer les valeurs d'adhérence de la suite $(\cos(\sqrt{n}\theta))_{n\geqslant 0}$.

Suites récurrentes linéaires

Exercice 37 ●○○○

Pour chacune des suites suivantes définies par récurrence, donner une expression du terme général en fonction de n.

1. $\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n}{e^2}. \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_0 = -2, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} + u_n = \pi. \end{cases}$
3. $\begin{cases} u_0 = 4, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 2}{5}. \end{cases}$
4. $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 2, \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1}. \end{cases}$
5. $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = \frac{2}{3}, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + 4u_n = 2u_{n+1}. \end{cases}$
6. $\begin{cases} u_0 = -1, u_1 = 1, u_2 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 7u_{n+1}. \end{cases}$

Exercice 38 ●●○○

Expliciter en fonction de n le terme général de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

1. $\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2u_n^2. \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_0 = 1, \quad u_1 = 2, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}^6}{u_n^5}. \end{cases}$

Exercice 39 ●●○○

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + (-1)^n.$$

1. Déterminer α pour que la suite $(s_n)_{n\geqslant 0}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $s_n = \alpha n(-1)^n$ vérifie la même relation de récurrence que $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
2. En déduire une expression de u_n en fonction de u_0, u_1 et n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Suites récurrentes « $u_{n+1} = f(u_n)$ »

Exercice 40 ●○○○ — Banque d'exercices CCINP 2024 (43)

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par

$$u_0 = x_0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \operatorname{Arctan}(u_n).$$

   a. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
   b. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions h, continues sur $\mathbb{R}$, telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = h(\operatorname{Arctan} x).$$

Exercice 41 ●●○○ Dans chacune des situations suivantes, déterminer les variations de la fonction sous-jacente, la position de son graphe par rapport à la droite d'équation $y = x$ ainsi que quelques domaines stables intéressants, puis étudier en fonction de u_0 la nature de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

1. $u_{n+1} = u_n - \ln u_n$. **2.** $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$. **3.** $u_{n+1} = 1 + \ln u_n$.

4. $u_{n+1} = 1 + \dfrac{u_n^2}{4}$. **5.** (●●●) $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + u_n}{2}$. **6.** (●●●) $u_{n+1} = \left|u_n^2 - \dfrac{1}{4}\right|$.

Exercice 42 ●●○○ On note f la fonction $x \longmapsto \sqrt{2-x}$ sur $]-\infty\,,2]$.

1. Pour quelles valeurs de u_0 peut-on définir une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$?

On suppose désormais que u_0 a une telle valeur.

2. **a.** Déterminer les points fixes de f et montrer qu'ils sont points fixes de $f \circ f$.
b. Montrer que les points fixes de $f \circ f$ sont racines d'un polynome P de degré 4
c. Vérifier que P admet -2 pour racine et en déduire les points fixes de $f \circ f$.

3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

Exercice 43 ●●○○ Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite. On suppose $u_0 > 0$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} u_k}.$$

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3. Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n)$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n}$ grâce au théorème de Cesàro.

Exercice 44 ●●○○ Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite. On suppose $u_0 > 0$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \mathrm{e}^{-u_n},$$

1. Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad v_n = e^{u_n}$.
a. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_{n+1} - v_n) = 1$.
b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{\ln n}$, grâce au théorème de Cesàro.

Exercice 45 ●●○○ Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par la donnée de $u_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2 + \ln u_n$.

1. On note f l'application $x \longmapsto 2 + \ln x$. Montrer que l'équation $f(x) = x$ possède deux solutions α et β. Étudier le signe de $f(x) - x$.

2. Étudier le comportement de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ selon les valeurs de u_0.

Exercice 46 ●●○○ **X MP 2022**

Étudier la convergence des suites réelles $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \int_0^1 \max\{x, v_n\}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \int_0^1 \max\{x, u_n\}\,\mathrm{d}x.$$

Suites définies implicitement

Exercice 47 ●●○○ Soient I un intervalle et $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue $x \in I$ possède une et une seule solution x_n ;
- la fonction f_n est strictement croissante sur I ;
- pour tout $x \in I$: $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$.

1. Conjecturer, à partir d'un dessin, le sens de monotonie de la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$.

2. Prouver proprement cette conjecture.

Exercice 48 ●●○○ Soit $n \geqslant 2$ et f_n la fonction définie sur $[1\,,+\infty[$ par

$$f_n(x) = x^n - x - 1.$$

1. Montrer qu'il existe un unique $x_n > 1$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et qu'elle converge vers une limite ℓ, que l'on déterminera.

Exercice 49 ●●○○

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x^n = \cos x$ d'inconnue $x \in [0\,,1]$ possède une et une seule solution x_n.

2. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

Exercice 50 ●●○○

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation
$$x^n + x^{n-1} + \ldots + x = 1,$$
d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$, possède une et une seule solution x_n.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad x_n^{n+1} = 2x_n - 1$.
3. Montrer que $(x_n)_{n \in N}$ converge et préciser sa limite.

Exercice 51 ●●○○

1. a. Montrer que l'équation $\ln x = -nx$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$, possède une et une seule solution x_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   b. Etudier la monotonie de la suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$.
   c. Étudier $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$.
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = nx_n$.
   a. Étudier $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n$.
   b. Montrer que $y_n + \ln y_n = \ln n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{y_n}{\ln n} = 1$.

Indications

Exercice 2. 9. On pourra isoler les deux derniers termes de la somme.

Exercice 7. Raisonner par l'absurde et exploiter l'encadrement $u_n < \mathrm{e} < v_n$.

Exercice 31. 2. Montrer que $\lfloor \sqrt{b^2n^2 + 2an} \rfloor = bn$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 32. Raisonner par l'absurde et utiliser les formules de trigonométrie.

Exercice 33. On pourra s'intéresser à $\sin((n+1)\theta)$ et $\cos((n+1)\theta)$.

Exercice 46. Que dire de la fonction $a \longmapsto \displaystyle\int_0^1 \max\{x, a\}\,\mathrm{d}x$?

Éléments de réponses

Exercice 1. 1. Vrai. **2.** Faux : $(n)_{n\geqslant 0}$ et $(-1)_{n\geqslant 0}$. **3.** Vrai. **4.** Faux : $((-1)^n)_{n\geqslant 0}$.
5. Vrai. **6.** Faux : $\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)_{n\geqslant 0}$. **7.** Faux : idem **e**. **8.** Faux : $(n+(-1)^n)_{n\geqslant 0}$.
9. Faux : $u_n = n$ et $v_n = n + 1 + (-1)^n$. **10.** Faux $(n)_{n\geqslant 0}$. **11.** Vrai. **12.** Vrai.
13. Faux : $u_n = n$ et $v_n = -1$.

Exercice 2. 1. $+\infty$. **2.** 0. **3.** $\frac{1}{2}$. **4.** 0. **5.** $-\frac{1}{3}$. **6.** 0. **7.** $+\infty$. **8.** $\frac{x}{2}$. **9.** 1. **10.** 0. **11.** 1. **12.** $+\infty$.

Exercice 3.
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{q^n + n^\alpha}{1 + \ln^\beta n} = \begin{cases} +\infty & \text{si } q > 1 \text{ ou } \alpha > 0 \\ 0 & \text{si } (q < 1 \text{ et } \alpha < 0) \text{ ou } (\beta > 0 \text{ et } (q \leqslant 1 \text{ ou } \alpha \leqslant 0)) \\ 1 & \text{si } [\beta < 0 \text{ et } ((q < 1 \text{ et } \alpha = 0) \text{ ou } (q = 1 \text{ et } \alpha < 0))] \\ & \quad \text{ou } [q = 1 \text{ et } \alpha = 0 \text{ et } \beta < 0] \\ 2 & \text{si } q = 1 \text{ et } \alpha = 0 \text{ et } \beta < 0 \\ 1/2 & \text{si } \beta = 0 \text{ et } ((q < 1 \text{ et } \alpha = 0) \text{ ou } (q = 1 \text{ et } \alpha < 0)). \end{cases}$$

Exercice 4. 2. Rien. **3.** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^n}{n!} = +\infty$.

Exercice 5. 4. $-\ln 2$. **Exercice 8. 2.c.** $b\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$.

Exercice 12. 1. $+\infty$. **2.** $\left\lfloor \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \right\rfloor$. **3.** Pas de limite en général.

Exercice 14. 3. 4.

Exercice 19. a. -1 et $\frac{3}{2}$. **b.** -1 et 1. **c.** -1 et 1. **d.** 0 et $\frac{1}{2}$. **e.** 0 et $+\infty$.

Exercice 23. La suite $(z_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\begin{cases} 0 & \text{si } z_0 \in \mathbb{R}_- \\ z_0 & \text{si } z_0 \in \mathbb{R}_+ \\ |z_0| \frac{\sin(\arg z_0)}{\arg z_0} & \text{sinon.} \end{cases}$

Exercice 25. Dans les deux cas la suite converge.

Exercice 36. 3. $[-1, 1]$. **4.** $[-1, 1]$.

Exercice 37. 1. $u_n = \mathrm{e}^{-2n}$. **2.** $u_n = -\dfrac{4+\pi}{2}(-1)^n + \dfrac{\pi}{2}$. **3.** $u_n = 5 \times \left(\dfrac{3}{5}\right)^n - 1$.
4. $u_n = n + 1$. **5.** $u_n = 2^n\left(\cos\left(\dfrac{n\pi}{3}\right) - \dfrac{1}{3\sqrt{3}}\sin\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)\right)$.
6. $u_n = \dfrac{\sqrt{7}^{n-1}(1 + (-1)^{n-1})}{2}$, pour $n \geqslant 1$.

Exercice 38. 1. $u_n = 2^{2^n - 1}$. **2.** $u_n = 2^{\frac{1}{4}(5^n - 1)}$.

Exercice 39. 1. $\alpha = \frac{1}{3}$. **2.** $u_n = \frac{1}{9}[(3u_0 + 3u_1 + 1)2^n + (3n + 6u_0 - 3u_1 - 1)(-1)^n]$.

Exercice 40. 1.b $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0. **2.** Les fonctions constantes.

Exercice 46. Si $u_0 = v_0 = a \geqslant 1$, les deux suites sont constantes égales à a. Sinon, chacune des deux suites converge (vers 1) si et seulement si $u_0 \leqslant 1$ et $v_0 \leqslant 1$.

Exercice 48. 2. $\ell = 1$.

Exercice 49. 2. $\lim x_n = 1$.

Exercice 50. 3. $\lim x_n = 1/2$.