14 Anneau des polynômes à une indéterminée

Cahier de calcul : $\varnothing$. **Banque CCINP :** $\varnothing$.

Exercice 1 ○○○○ ☑ Calculer les produits

$$\left(X^3+X^2-X-1\right)\left(X^2-2X-1\right) \quad \text{et} \quad \left(2X^4-X^3+X^2+X+1\right)\left(X^2-3X+1\right).$$

Exercice 2 ●●○○ ☑ Déterminer les polynômes $P_n, Q_n, R_n \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$\left(X^2-2\cos(\alpha)X+1\right)\sum_{k=1}^{n}\sin(k\alpha)X^{n-k}$$
$$\ldots = \sin(\alpha)P_n(X)+\sin(n\alpha)Q_n(X)+\sin((n+1)\alpha)R_n(X).$$

Exercice 3 ●○○○ ☑ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Déterminer le degré et le coefficient dominant des polynômes suivants

1. $(X-1)^n-(X+7)^n$.
2. $(X+2)^n+(1-X)^n$.
3. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n+1}\left(X^k+X+1\right)$.
4. $\displaystyle\prod_{m=1}^{n}\left(3X^2+2mX+1\right)$.
5. $\displaystyle\prod_{j=1}^{n}\left(jX^4+2i\right)^{j^2}$.

Exercice 4 ●○○○ ☑ Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
Déterminer le degré du polynôme $P(X+1)-P(X)$ en fonction du degré de P.

Exercice 5 ●●○○ ☑

1. Simplifier la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{r}\binom{a}{k}\binom{b}{r-k}$, pour tous $a, b, r \in \mathbb{N}$.
2. En déduire une simplification de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{2n}{k}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6 ●○○○ Soit n un entier supérieur à 2 et $\zeta = \mathrm{e}^{2i\pi/n}$.
Si P est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ tel que $P(\zeta X) = P(X)$, montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X) = Q(X^n)$.

Exercice 7 ●○○○ Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)!}X^{k+1}P^{(k)}$ est l'unique primitive de P qui s'annule en 0, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$.

Exercice 8 ●○○○ Montrer que l'application $P \longmapsto P'$ est un endomorphisme surjectif du groupe $\mathbb{K}[X]$. Est-il injectif ?

Exercice 9 ●●○○ 💡☑ Déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{K}[X]$ tels que $X(X+1)P''+(X+2)P'-P=0$.

Exercice 10 ●●○○ ☑ Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

1. Déterminer, en fonction des coefficients de P, une expression simple de
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|P\left(\mathrm{e}^{it}\right)\right|^2\mathrm{d}t.$$
2. On suppose que P est non nul à coefficients entiers et que, pour tout $u \in \mathbb{U}$, $|P(u)| < \sqrt{2}$. Montrer qu'alors P est un monôme.
3. Que devient le résultat de la question précédente si l'on remplace l'inégalité stricte par une inégalité large.

Exercice 11 ●○○○ ☑ Répondre par Vrai ou Faux en justifiant.

1. Le degré de la somme de deux polynômes est le plus grand des degrés.
2. Le degré du produit de deux polynômes est la somme de leurs degrés.
3. Si $(X-1)P = 0$, alors P est le polynôme nul.
4. Si P et Q sont deux polynômes de degré $n \in \mathbb{N}$ et si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, alors $\alpha P + \beta Q \in \mathbb{K}_n[X]$.
5. Si $n \in \mathbb{N}$ et P est de degré n, alors P' est de degré $n-1$.
6. Si $P \in \mathbb{C}_n[X]$ et $P' \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 12 ●●●○ — Polynômes de Tchebychev Soit un entier $n \geqslant 1$.

Pour cet exercice, on admettra qu'un polynôme ayant une infinité de racines est nécessairement nul (ce résultat sera établi au chapitre 17).

1. **a.** Rappeler la formule de Moivre.

b. En déduire l'existence d'un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad T_n(\cos x) = \cos(nx).$$

2. Montrer que, pour tout nombre complexe z de module 1, on a

$$T_n\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right).$$

3. **a.** Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k}$.

b. Montrer que le polynôme T_n est à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Déterminer son degré et son coefficient dominant.

4. On considère le nombre complexe $z = \dfrac{3+4i}{5}$.

a. Déterminer son module.

b. Soit θ un argument de z, préciser $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

c. En utilisant le polynôme T_n, montrer qu'il n'existe aucun entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $z^n = 1$.

Exercice 13 ●●○○ — X MP 2022

Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{3}$?

Indications

Exercice 9. Raisonner par analyse-synthèse et montrer que si P est un tel polynôme alors il est nul ou de degré 1.

Exercice 12. **3.a** Cf. exercice 1.41. **4.c** On pourra raisonner par l'absurde.

Exercice 13. Raisonner par l'absurde et exploiter l'irrationalité de $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{6}$.

Éléments de réponses

Exercice 1. $X^5 - X^4 - 4X^3 + 3X + 1$ et $2X^6 - 7X^5 + 6X^4 - 3X^3 - X^2 - 2X + 1$.

Exercice 2. $P_n = X^{n+1}$, $Q_n = 1$, $R_n = -X$.

Exercice 3. **1.** $n-1$ et $-8n$. **2.** n et 2 si n est pair, et $n-1$ et $3n$ si n est impair. **3.** $\dfrac{n(n+3)}{2}$ et 1. **4.** $2n$ et 3^n. **5.** $\dfrac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$ et $\displaystyle\prod_{j=1}^{n} j^{j^2}$.

Exercice 4. $\deg P = \begin{cases} -\infty & \text{si } P \in \mathbb{K}, \\ \deg P - 1 & \text{sinon.} \end{cases}$

Exercice 5. **1.** $\dbinom{a+b}{r}$. **2.** Avec $a = n$ et $b = r = 2n$, la somme vaut $\dbinom{3n}{2n} = \dbinom{3n}{n}$.

Exercice 9. $P = aX + 2a$, avec $a \in \mathbb{K}$.

Exercice 10. **1.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2$ si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

Exercice 11. **1.** Faux ($P = X$ et $Q = -X$). **2.** Vrai. **3.** Vrai. **4.** Vrai. **5.** Faux ($P = 0$). **6.** Faux ($P = X + i$).

Exercice 12. **1.b** $T_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^p \binom{n}{2p} \left(1 - X^2\right)^p X^{n-2p}$. **3.a** 2^{n-1}. **3.b** T_n est de degré n et de coefficient dominant égal à 2^{n-1}. **4.a** $|z| = 1$. **4.b** $\cos\theta = \frac{3}{5}$ et $\sin\theta = \frac{4}{5}$.

Exercice 13. Non.