13 | Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Cahier de calcul : fiche 23. **Banque CCINP :** exercices 21 et 46.

Divisibilité, division euclidienne, congruence

Exercice 1 ●○○○ Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

1. $x - 1 \mid x + 3$. **2.** $x + 2 \mid x^2 + 2$. **3.** $x - 3 \mid x^3 - 3$.

Exercice 2 ●●○○ **Critères de divisibilité**

1. Démontrer les critères de divisibilité usuels par 2, 3, 5, 9 et 10.

2. Déterminer un critère de divisibilité par 8, par 6, puis par 11.

3. **a.** Calculer $7 \times 11 \times 13$.

b. Déterminer si l'entier 29 310 478 561 est divisible par 7, 11 ou 13 ?

Exercice 3 ●●○○ **Puissances modulaires**

1. Trouver le reste de la division euclidienne par 13 du nombre 100^{1000}.

2. Calculer $2000^{2000} \mod 7$.

3. Calculer $2^{500} \mod 3$.

4. Quel est le chiffre des unités de $7^{7^{7^{7^{7^{7^{7}}}}}}$.

Exercice 4 ●○○○ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

1. $7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}$. **2.** $11 \mid 2^{6n+3} + 3^{2n+1}$.

3. $6 \mid 5n^3 + n$. **4.** $8 \mid 5^n + 2 \times 3^{n-1} + 1$.

Exercice 5 ●○○○
Montrer que la somme de trois cubes consécutifs est toujours divisible par 9.

Exercice 6 ●●○○ **Produit d'entiers consécutifs** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que tout produit de n entiers consécutifs est divisible par $n!$.

Exercice 7 ●●○○ Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$a \equiv b\,[n] \quad \Longrightarrow \quad a^n \equiv b^n\,[n^2].$$

Exercice 8 ●●○○ Montrer que $a^{2^n} \equiv 1\big[2^{n+1}\big]$, pour tous $a \in \mathbb{Z}$ impair et $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9 ●●○○

1. Montrer que $n(n+2)(7n-5)$ est divisible par 6, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

2. Pour quels entiers $n \in \mathbb{Z}$ est-il vrai que $n + 1$ divise $n + 7$?

3. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{Z}$ l'entier $n^2 + (n+1)^2 + (n+3)^2$ est-il divisible par 10 ?

4. Trouver tous les nombres premiers p pour lesquels $3p + 4$ est un carré parfait.

5. Pour quels $n \in \mathbb{Z}$ le produit $n(n+2)$ est-il une puissance de 2 ?

PGCD, PPCM et entiers premiers entre eux

Exercice 10 ●○○○
Montrer que le pgcd de $2n + 4$ et $3n + 3$ ne peut être que $1, 2, 3$ ou 6.

Exercice 11 ●●○○ Soit $a, b, n \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que $n^3 + 3n^2 - 5$ et $n + 2$ sont premiers entre eux.

2. Montrer que si $a \wedge n = 1$, alors $(ab) \wedge n = b \wedge n$.

3. Montrer que $\big(n^4 + 3n^2 - n + 2\big) \wedge \big(n^2 + n + 1\big) = (n-2) \wedge 7$.

4. Montrer que $(a + b) \wedge (a \vee b) = a \wedge b$.

Exercice 12 ●●○○ On pose, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -n \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour tous $a, b, q, r \in \mathbb{Z}$,

$$a = bq + r \iff \begin{pmatrix} b \\ r \end{pmatrix} = M_q \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

2. En déduire une version matricielle de l'algorithme d'Euclide étendu.

3. Mettre en œuvre cette technique pour calculer $1254 \wedge 40$ et déterminer une relation de Bézout de ces deux entiers.

Exercice 13 ●●○○
Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\dfrac{21n-3}{4}$ et $\dfrac{15n+2}{4}$ ne sont pas tous les deux entiers.

Exercice 14 ●○○○ Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $n+1$ et $2n+1$ sont premiers entre eux et en déduire que $n+1 \mid \dbinom{2n}{n}$.

Exercice 15 ●●○○ Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note r_k le reste de la division euclidienne de a^k par b. Pourquoi l'application $k \longmapsto r_k$ n'est-elle pas injective sur $\mathbb{N}$?
2. En déduire que $a^n \equiv 1[b]$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 16 ●●○○ Mines-Ponts MP 2022 Soit $a, b \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que a et b sont premiers entre eux si et seulement si, pour tout entier $n \geqslant (a-1)(b-1)$, il existe $u, v \in \mathbb{N}$ tel que $au + bv = n$.

Exercice 17 ●●○○
Montrer que, pour tous $a, b \geqslant 2$ premiers entre eux, $\dfrac{\ln a}{\ln b}$ est irrationnel.

Exercice 18 ●●○○ Sous-groupes de $\mathbb{Z}$

1. Montrer que $\mathbb{Z}$ est le seul sous-anneau de $\mathbb{Z}$.
2. On s'intéresse à présent aux sous-groupes de $\mathbb{Z}$.
   - **a.** Montrer que $n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   - **b.** Montrer que tout sous-groupe de $\mathbb{Z}$ est de la forme $n\mathbb{Z}$, pour un certain $n \in \mathbb{Z}$.
3. Soit $a, b \in \mathbb{Z}$.
   - **a.** Montrer que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.
   - **b.** Démontrer que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = (a \wedge b)\mathbb{Z}$.

Exercice 19 ●○○○ Montrer que $\mathbb{U}_a \cap \mathbb{U}_b = \mathbb{U}_{a \wedge b}$ pour tous $a, b \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 20 ●●○○

1. On note A l'ensemble des rationnels $\dfrac{p}{2^n}$, (p, n) décrivant $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.
   - **a.** Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.
   - **b.** Déterminer $\mathcal{U}(A)$.
2. Mêmes questions avec l'ensemble $\mathbb{D}$ des décimaux.

Nombres premiers

Exercice 21 ●○○○ Banque d'exercices CCINP 2024 (86)

1. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$. Prouver que si $a \wedge b = 1$ et $a \wedge c = 1$, alors $a \wedge (bc) = 1$.
2. Soit p un nombre premier.
   - **a.** Prouver que, pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise $\dbinom{p}{k}k!$, et en déduire que p divise $\dbinom{p}{k}$.
   - **b.** Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^p \equiv n \bmod p$.
     Indication : procéder par récurrence.
   - **c.** En déduire, pour tout entier naturel n, que
     $$p \nmid n \implies n^{p-1} \equiv 1 \bmod p.$$

Exercice 22 ●●○○ Soit $p \in \mathbb{P}$ et $r \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$\forall m \in \mathbb{Z}, \quad m \equiv 1\,[p^r] \implies m^p \equiv 1\,[p^{r+1}].$$

Exercice 23 ●○○○ Soient $n \geqslant 2$ et N la somme de n entiers impairs consécutifs. Montrer que N n'est pas un nombre premier.

Exercice 24 ●●○○ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n le n^{e} nombre premier. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $\quad p_{n+1} < p_1 \dots p_n$.

Exercice 25 ●●○○

1. **a.** Montrer que tout entier naturel congru à 3 modulo 4 possède au moins un diviseur premier congru à 3 modulo 4.
   b. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4.
2. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 5 modulo 6.

Exercice 26 ●●●○ X MP 2022
Soit $p \geqslant 3$ un nombre premier et $t \in \mathbb{N}^*$. Soit $p_1, \dots, p_r$ des nombres premiers congrus à 1 modulo p^t. On pose $a = 2p_1 \cdots p_r$ et $c = a^{p^{t-1}}$.

1. Montrer que $c \equiv 2\,[p]$.
2. Montrer que $m = 1 + c + \ldots + c^{p-1}$ et $c-1$ sont premiers entre eux.
3. Soit q un facteur premier de m. Montrer que $q \equiv 1\,[p^t]$.
4. En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers congru à 1 modulo p^t.

Exercice 27 ●●○○ — Nombres de Fermat (Mines-Ponts MP 2022)

1. On suppose qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^m + 1$ soit premier. Montrer que m est une puissance de 2.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = 2^{2^n} + 1$. Montrer que, si $n \in \mathbb{N}$, alors $F_n = 2 + \prod_{k=0}^{n-1} F_k$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}, F_n = 2^{2^n} + 1$ est appelé le n^e *nombre de Fermat*. Les nombres de Fermat F_0, F_1, F_2, F_3 et F_4 sont premiers et on conjecture que ce sont les seuls.

3. Si m et n sont deux éléments distincts de $\mathbb{N}$, montrer que $F_m \wedge F_n = 1$.
4. Retrouver le fait que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Exercice 28 ●●●○ — Nombres de Mersenne (Mines-Ponts MP 2022) Soit $p, q \geqslant 2$ des entiers.

1. Montrer que si $q^p - 1$ est premier, alors p est premier et $q = 2$.
2. Montrer que si p est premier impair et k est un diviseur de $2^p - 1$, alors $k \equiv 1\,[2p]$.
   (Cette question se traite plus naturellement avec le programme de seconde année)

Pour tout $p \geqslant 2$, l'entier $M_p = 2^p - 1$ est appelé le p^e *nombre de Mersenne*.
Tous ne sont pas premiers, e.g. $M_{11} = 23 \times 89$.
Le plus grand nombre de Mersenne premier actuellement connu est $2^{136\,279\,841} - 1$*, dont l'écriture décimale est formée de* $41\,024\,320$ *chiffres.*

Exercice 29 ●●○○ — Oral ENS Montrer qu'il existe un multiple de 1996 dont l'écriture décimale ne comporte que le chiffre 4.

Valuations p-adiques et décomposition primaire

Exercice 30 ●○○○ — Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer que si a^2 divise b^2, alors a divise b.

Exercice 31 ●○○○ — Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n est à la fois un carré parfait et un cube parfait, alors il est la puissance sixième d'un entier.

Exercice 32 ●○○○ — Montrer que $(a \wedge b)^n = a^n \wedge b^n$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 33 ●○○○ — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer le cardinal de l'ensemble $\mathcal{D}(n)$ des diviseurs de n en fonction de ses valuations p-adiques $v_p(n)$.

Exercice 34 ●●○○ — Formule de Legendre

1. Soit $p \in \mathbb{P}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note, pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$M_k = \left\{ mp^k \mid m \in \mathbb{N} \right\} \cap [\![1\,,n]\!] \quad \text{et} \quad V_k = \{ m \in [\![1\,,n]\!] \mid v_p(m) = k \}.$$
   a. Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le cardinal de M_k.
   b. En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le cardinal de V_k.
   c. En déduire la *formule de Legendre*,
$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor.$$
   où la somme est faussement infinie, car $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = 0$ dès que $p^k > n$.
2. Par combien de zéros l'entier $100\,!$ s'achève-t-il ?
3. Pour tous $a, b \in \mathbb{N}$, montrer que $\binom{a+b}{a}$ divise $\binom{2a}{a}\binom{2b}{b}$.

Exercice 35 ●●●○ — Oral ENS Soit $p \in \mathbb{P}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1\,,p^n - 1]\!]$. Quelle est la valuation p-adique de $\binom{p^n}{k}$?

Exercice 36 ●●●○ —
Déterminer tous les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels 2^n divise $3^n - 1$.

Exercice 37 ●●○○ — Mines-Ponts MP 2022
Donner les couples (m, n) d'entiers naturels tels que $2^m - 3^n = 1$.

Exercice 38 ●●●○ — Théorème de Kurschak (Oral ENS)
Pour quelles valeurs entières $n \geqslant m$ a-t-on $\sum_{i=m}^{n} \frac{1}{i} \in \mathbb{N}$?

Exercice 39 ●●●○ — Déterminer l'ensemble des entiers naturels $n \geqslant 2$ tels que
$$\forall\, d \geqslant 2, \quad d \mid n \implies d - 1 \mid n - 1.$$

Exercice 40 ●●●● — ENS Lyon MP 2022 On note

$$\mathbb{Z}[i\sqrt{2}] = \left\{a + ib\sqrt{2} \;\middle|\; (a,b) \in \mathbb{Z}^2\right\}.$$

1. Montrer que $A = \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.
2. Montrer que l'anneau A est euclidien, *i.e.* il existe une fonction $N : A \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que, pour tout $(a,b) \in A \times (A\backslash\{0\})$, il existe un couple $(q,r) \in A^2$ tel que $a = bq + r$ et $N(r) < N(b)$.
3. Énoncer et démontrer un théorème d'existence et d'unicité d'une décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$.

Équations diophantiennes

Exercice 41 ●○○○

1. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $x \wedge y + x \vee y = x + y$.
2. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ les systèmes

   a. $\begin{cases} x \wedge y = 5 \\ x \vee y = 60 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} x + y = 100 \\ x \wedge y = 10 \end{cases}$

Exercice 42 ●●○○ Résoudre les équations, d'inconnue $(x,y) \in \mathbb{N}^2$, suivantes

1. $x^2 - y^2 = 7$.
2. $9x^2 - y^2 = 32$.
3. $x^2 - 2y^2 = 3$ en raisonnant modulo 8.
4. $15x^2 - 7y^2 = 9$ en raisonnant modulo 3.

Exercice 43 ●●○○

1. Soient $a, b, n \in \mathbb{Z}$ pour lesquels $a \wedge n = 1$.
   - **a.** Montrer que $aa' \equiv 1\,[n]$ pour un certain $a' \in \mathbb{Z}$.
   - **b.** En déduire, en fonction de a', b et n, les solutions de l'équation $ax \equiv b\,[n]$ d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$.
2. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$,

   a. $5x \equiv 3\,[28]$. **b.** $14x \equiv 6\,[34]$.
3. Résoudre l'équation $ax \equiv b\,[n]$ d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$, pour tous $a, b, n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 44 ●●○○ Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$ avec $(a,b) \neq (0,0)$. On s'intéresse à l'équation $(\mathscr{E}) : ax + by = c$, d'inconnue $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$.

1. Montrer que $(\mathscr{E})$ n'a pas de solution si c n'est pas un multiple de $a \wedge b$.
2. On suppose à présent que $a \wedge b$ divise c.
   - **a.** Montrer, grâce à une relation de Bézout de a et b, que $(\mathscr{E})$ possede une solution (x_0, y_0).
   - **b.** Résoudre $(\mathscr{E})$ et interpréter le résultat géométriquement.
3. Résoudre les équations, d'inconnue $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$,

   a. $7x - 12y = 3$. **b.** $20x - 53y = 3$.

Exercice 45 ●●○○ Résoudre le système $\begin{cases} x \equiv 1\,[6] \\ x \equiv 3\,[5], \end{cases}$ d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$.

Exercice 46 ●●○○ — Banque d'exercices CCINP 2024 (94)

1. Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.
2. Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux, soit $c \in \mathbb{N}$. Prouver que

$$(a \mid c \text{ et } b \mid c) \iff ab \mid c.$$

3. On considère le système d'inconnue x dans $\mathbb{Z}$

$$(\mathcal{S}) : \quad \begin{cases} x \equiv 6 \bmod 17 \\ x \equiv 4 \bmod 15. \end{cases}$$

   - **a.** Déterminer une solution particulière x_0 de $(\mathcal{S})$ dans $\mathbb{Z}$.
   - **b.** Déduire des questions précédentes la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système $(c\mathcal{S})$.

Exercice 47 ●●○○ — Triplets pythagoriciens

1. Soit $(x,y,z) \in (\mathbb{N}^*)^3$. On suppose que

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad \text{et} \quad x \wedge y = 1.$$

   - **a.** Montrer que $y \wedge z = 1$.
   - **b.** Montrer que x ou y est pair. Quitte à les permuter, on suppose désormais y pair.
   - **c.** Montrer que $y + z$ et $z - y$ sont premiers entre eux, puis que pour certains $a, b \in \mathbb{N}^*$ impairs et premiers entre eux : $y + z = a^2$ et $z - y = b^2$.
   - **d.** En déduire la forme du triplet (x,y,z).
2. Résoudre finalement l'équation $x^2 + y^2 = z^2$ d'inconnue $(x,y,z) \in (\mathbb{N}^*)^3$.

Exercice 48 ●●○○ Pour montrer que l'équation $y^2 = x^3 + 7$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ n'a pas de solution, on suppose par l'absurde qu'elle en possède une (x, y).

1. Montrer que $x \equiv 1\,[4]$.
2. Montrer que $x^3 + 8$ possède un facteur premier p congru à 3 modulo 4.
3. Calculer y^{p-1} modulo p de deux manières différentes, puis conclure.

Exercice 49 ●●●○

On veut résoudre l'équation $x^y = y^x$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{N}^*$.

1. Soient $x, y \in \mathbb{N}^*$ deux entiers pour lesquels $x \leqslant y$ et $x^y = y^x$. Montrer que x divise y en étudiant leur PGCD.
2. Conclure.

Indications

Exercice 1. Exprimer la divisibilité en termes de congruence.

Exercice 2. Écrire les entiers en base 10 et exprimer la divisibilité en termes de congruence.

Exercice 3. Faire des calculs de congruence.

Exercice 8. Procéder par récurrence.

Exercice 11. **3.** et **4.** Utiliser le résultat obtenu en **2**.

Exercice 13. Calculer $(21n - 3) \wedge (15n + 2)$.

Exercice 22. Exploiter la formule du binôme et les propriétés des coefficients $\binom{p}{k}$.

Exercice 25. **1.b** Adapter la preuve de l'infinité de l'ensemble $\mathbb{P}$.

Exercice 28. **2.** Traiter le cas k premier et considérer $r = \min\{m \in \mathbb{N}^* \mid 2^m \equiv 1\,[k]\}$.

Exercice 29. $1996 = 4 \times 499$ et 499 est un nombre premier.

Exercice 35. Calculer $v_p(p^n - j)$ pour $j \in [\![1, k-1]\!]$ et en déduire une expression de $v_p\left(k!\binom{p^n}{k}\right)$.

Exercice 36. Exprimer $v_2(3^n - 1)$ en fonction de $v_2(n)$ (cf. exercice 8).

Exercice 37. Examiner la valuation 2-adique de $3^n + 1$.

Exercice 38. S'intéresser à la valuations 2-adique maximale des entiers entre m et n.

Exercice 39. Considérer le plus grand diviseur non trivial de n.

Exercice 40. **2.** Considérer $N : a + ib\sqrt{2} \longmapsto \left|a + ib\sqrt{2}\right|^2$ et commencer par considérer le quotient a/b dans $\mathbb{C}$. **3.** On pourra s'inspirer de la preuve du théorème 56.

Exercice 41. Factoriser x et y par leur PGCD.

Exercice 42. **1.** et **2.** Factoriser. **3.** Examiner les carrés modulo 8. **4.** Examiner les carrés modulo 3.

Exercice 43. **3.** Procéder par analyse synthèse.

Exercice 48. **2.** Factoriser $x^3 + 8$.

Éléments de réponses

Exercice 1. **1.** $x \in \{-3, -1, 0, 2, 3, 5\}$. **2.** $x \in \{-8, -5, -4, -3, -1, 0, 1, 4\}$. **3.** $x \in \{-21, -9, -5, -3, -1, 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 15, 27\}$.

Exercice 3. **1.** 7692. **2.** 4. **3.** 1. **4.** 3.

Exercice 9. **2.** $n \in \{-7, -4, -3, -2, 0, 1, 2, 5\}$. **3.** $10\mathbb{Z} \cup (4 + 10\mathbb{Z})$. **4.** Aucun. **5.** $n \in \{0, 2\}$.

Exercice 20. **1.b** $\{2^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. **2.b** $\{2^k 5^l \mid k, l \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 29. 1996 divise l'entier 444...4 formé de 498 chiffres 4.

Exercice 33. $|\mathcal{D}(n)| = 2\prod_{p \in \mathbb{P}}(1 + v_p(n))$

Exercice 34. **2.** 24.

Exercice 35. $n - v_p(k)$.

Exercice 36. $n \in \{1, 2, 4\}$.

Exercice 37. Les deux solutions sont $(1, 0)$ et $(2, 1)$.

Exercice 38. L'unique solution est $m = n = 1$.

Exercice 39. Ce sont les entiers p et p^2, pour $p \in \mathbb{P}$.

Exercice 41. **1.** $\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x \mid y \text{ ou } y \mid x\}$. **2.a** $\{(5, 60), (15, 20), (20, 15), (60, 5)\}$. **2.b** $\{(10, 90), (30, 70), (70, 30), (90, 10)\}$.

Exercice 42. **1.** $\{(3, 4)\}$. **2.** $(2, 2), (3, 7)$. **3.** $\varnothing$. **4.** $\varnothing$.

Exercice 43. **1.b** $a'b + n\mathbb{Z}$. **2.a** $23 + 28\mathbb{Z}$. **2.b** $15 + 17\mathbb{Z}$. **3.** Posons $d = a \wedge n$. L'ensemble des solutions est
$$\begin{cases} \varnothing & \text{si } d \nmid b \\ \mathbb{Z} & \text{si } a = n = b = 0 \\ c\frac{b}{d} + \frac{n}{d}\mathbb{Z} & \text{si } d \mid b \text{ avec } c\frac{a}{d} \equiv 1\,[\frac{n}{d}]. \end{cases}$$

Exercice 44. **2.b** $\{(x_0 + kb', y_0 - ka') \mid k \in \mathbb{Z}\}$, avec $a = (a \wedge b)a'$ et $b = (a \wedge b)b'$. **3.a** $\{(-15 + 12k, -9 + 7k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$. **3.b** $\{(24 + 53k, 9 + 20k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 45. $13 + 30\mathbb{Z}$.

Exercice 49. $\{(x, x) \mid x \in \mathbb{N}^*\} \cup \{(2, 4), (4, 2)\}$.