12 Matrices et systèmes linéaires

Cahier de calcul : fiches 21 et 22. **Banque CCINP :** $\varnothing$.

Opérations matricielles

Exercice 1 ●○○○

1. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -3 & 2 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}.$$

Quels produits sont possibles ? Les calculer !

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2, B^2, AB et BA.

Exercice 2 ●○○○ Calculer $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 ●○○○ Pour toute matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, on appelle *conjuguée de* A la matrice

$$\overline{A} = (\overline{a_{i,j}})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}.$$

1. Montrer que, pour tous $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$.

2. Montrer que, pour tous $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$.

3. Montrer que, pour tous $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\overline{A^{-1}} = \left(\overline{A}\right)^{-1}$.

Systèmes linéaires

Exercice 4 ●○○○ Résoudre les systèmes linéaires suivants d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ou $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

1. $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x - y = -3 \\ -6x + 3y = 9 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - 3y - 7z = 10 \\ x + 3y + 4z = 6 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + 5y - 3z = 1 \\ 3x + 4y + 4z = 1 \\ x - 2y + 4z = 3 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + 3y + 2z = 4 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x - y + 2z = 10 \\ x + 2y - 3z = -7 \\ 5x + 4y + z = 13 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ -3x + 2y - z = 3 \\ -x + y + z = 4 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ 4x + y + z = 3 \end{cases}$

9. $\begin{cases} -2x + y - z = 1 \\ x + 2y + z = 4 \\ 3x + 26y + 7z = 48 \end{cases}$

Exercice 5 ●○○○ Résoudre les systèmes linéaires suivants d'inconnues $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

1. $\begin{cases} 2x - y + 2z - 2t = 3 \\ x - 3y - z + 6t = 4 \\ -3x + y - z + 2t = -4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x + 3y + 2z + 3t = 5 \\ 3x - 5z = 1 \\ 7x + 5y + 5t = 9 \end{cases}$

Exercice 6 ●○○○ Pour quelles valeurs de $a, b, c \in \mathbb{R}$, le système linéaire

$$\begin{cases} x + y + 2z = a \\ x + z = b \\ 2x + y + 3z = c \end{cases}$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ est-il compatible ?

Exercice 7 ●○○○ Déterminer les coefficients de l'unique polynôme P de degré 2 pour lequel

$$P(1) = 2, \quad P(2) = 1 \quad \text{et} \quad P(3) = 2.$$

Exercice 8 ●○○○ Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.
Déterminer les coefficients réels a, b, c, d tels que $aA^3 + bA^2 + cA + dI_3 = 0$.

Exercice 9 ●●○○ Résoudre les systèmes linéaires suivants d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$.

1. $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + y + z = -m(x+1) \\ 3x + 3y + z = my \\ 3x + 3y + z = -mz \end{cases}$

Anneau des matrices carrées

Exercice 10 ●○○○ Montrer que, pour tous $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $p \in \mathbb{N}^*$,

$$A^p - B^p = \sum_{i=0}^{p-1} A^i (A - B) B^{p-i-1}.$$

Exercice 11 ●●○○ Une matrice carrée est dite *stochastique* lorsque tous ses coefficients sont positifs ou nuls et lorsque la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1. Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est encore une matrice stochastique.

Exercice 12 ●●○○ Montrer qu'il n'existe pas de couple de matrices $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$ tel que $AB - BA = I_n$.

Exercice 13 ●○○○ Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ symétriques.
Montrer que AB est symétrique si et seulement si $AB = BA$.

Exercice 14 ●●○○

1. Exprimer, pour tous $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr}\left(A^\top B\right)$ en fonction des coefficients de A et de B.
2. À quelle condition nécessaire et suffisante sur A a-t-on $\operatorname{tr}\left(A^\top A\right) = 0$?

Exercice 15 ●●○○ Montrer que tout élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ s'écrit de façon unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Exercice 16 ●●○○ **Un critère de nilpotence**
Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{T}_p$ l'ensemble des matrices carrées $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad j < i + p \implies m_{ij} = 0.$$

1. Quelle est concrètement la forme des matrices de $\mathscr{T}_p$, pour tout $p \in \mathbb{N}$?
2. Montrer que, pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, $A \in \mathscr{T}_p$ et $B \in \mathscr{T}_q$, on a $AB \in \mathscr{T}_{p+q}$.
3. En déduire que toute matrice de $\mathscr{T}_1$ est nilpotente.

Exercice 17 ●●○○ Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Résoudre en fonction de A et B l'équation matricielle $X + \operatorname{tr}(X)A = B$, d'inconnue $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 18 ●●○○ Déterminer les puissances des matrices suivantes.

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. **b.** $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. **c.** $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. **d.** $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

e. $E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **f.** $F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. **g.** $G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

h. $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **i.** $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **j.** $J = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$.

k. $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{[n]}$. **l.** $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{[n]}$.

Exercice 19 ●○○○ Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in \mathbb{R}$ tel que
$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2x_n & 1 - 2x_n & 2x_n \\ x_n & -x_n & x_n + 1 \end{pmatrix}.$$
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.
3. En déduire l'expression de M^n en fonction de n.

Exercice 20 ●●○○ Calculer les puissances de la matrice $\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$, avec $a, b, c \in \mathbb{K}$.

Exercice 21 ●●○○ Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Le cas échéant, déterminer leur inverse.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -6 & -15 \end{pmatrix}$. **3.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$. **4.** $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. **6.** $\begin{pmatrix} 1 & \overline{z} & \overline{z}^2 \\ z & 1 & \overline{z} \\ z^2 & z & 1 \end{pmatrix}$ $(z \in \mathbb{C})$. **7.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

8. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 13 & 2 & 1 & 9 \\ 7 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. **9.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{[n]}$. **10.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}_{[n]}$.

Exercice 22 ●●○○ Pour quelles valeurs du réel a la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Le cas échéant, déterminer l'inverse de A.

Exercice 23 ●●○○ Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Déterminer les réels λ tels que la matrice $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible.

Exercice 24 ●○○○ Soit $A \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{K})$ et $C \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse sous forme d'une matrice par blocs.

Exercice 25 ●○○○ Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A + B = AB$.

1. Montrer que $I_n - A$ et $I_n - B$ sont inversibles.
2. Montrer que A et B commutent.

Exercice 26 ●○○○

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   - **a.** Calculer A^2.
   - **b.** La matrice A est-elle inversible ? Le cas échéant, expliciter son inverse.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.
   - **a.** Calculer A^3.
   - **b.** La matrice A est-elle inversible ? Le cas échéant, expliciter son inverse.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
   - **a.** Calculer $A^3 + 3A^2 + 3A$.
   - **b.** La matrice A est-elle inversible ? Le cas échéant, expliciter son inverse.
   - **c.** Résoudre l'équation $AX = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, où $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
4. On considère les matrices suivantes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, où $n \geqslant 2$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

   - **a.** Établir une relation entre A, J et I_n.
   - **b.** Calculer J^2.
   - **c.** En déduire que A est inversible et l'expression de son inverse.

Exercice 27 ●●○○ On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Résoudre, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le système linéaire $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. En déduire trois matrices colonnes $X_i \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ non nulles et trois réels distincts λ_i, avec $i \in [\![1\,,3]\!]$, tels que

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![1\,,3]\!], \quad AX_i = \lambda_i X_i.$$

On note P la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de colonnes X_1, X_2, X_3.

3. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

4. Déterminer sans calcul une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $AP = PD$.

5. En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$, une expression de A^k en fonction de k, P et D, puis une expression explicite de A^k en fonction de k.

Exercice 28 ●●○○ — Une construction matricielle de $\mathbb{C}$

Au chapitre 6 nous avons admis l'existence d'un corps $\mathbb{C}$

- contenant $\mathbb{R}$ et un élément i vérifiant $i^2 = -1$;
- dont tout élément s'écrit de façon unique sous la forme $a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

L'exercice qui suit propose la construction d'un sur-corps de $\mathbb{R}$ que nous pourrons identifier à $\mathbb{C}$. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}$, on pose

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

et on note $\mathcal{C} = \{M(a,b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}I_2 + \mathbb{R}J$, où $J = M(0,1)$.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-anneau commutatif de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Montrer que $\mathcal{C}$ est un corps.

3. Montrer que l'application $x \longmapsto xI_2$ est un morphisme injectif d'anneaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

4. Conclure.

5. Dans le cadre de cette identification de $\mathcal{C}$ avec $\mathbb{C}$, à quelles opérations sur les matrices la conjugaison et le module correspondent-elles ?

Exercice 29 ●○○○

On note A l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, a et b décrivant $\mathbb{Z}$.

1. Montrer que A est un anneau pour les lois d'addition et de multiplication matricielles.

2. Déterminer $\mathrm{U}(A)$.

Exercice 30 ●●○○

Soit $n \in \mathbb{Z}$. On note A l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & nb \\ b & a \end{pmatrix}$, a et b décrivant $\mathbb{Q}$.

1. Montrer que A est un sous-anneau commutatif de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Montrer que A est un corps si et seulement si n n'est pas un carré parfait.

Exercice 31 ●●○○

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note $R(\theta)$ la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ suivante

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\theta \longmapsto R(\theta)$ est un morphisme de groupes de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Déterminer son noyau.

2. En déduire le calcul des puissances de la matrice $R(\theta)$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 32 ●○○○

Montrer que $M \longmapsto \det M$ est un morphisme surjectif de groupes de $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{K}), \times)$ dans $(\mathbb{K}^*, \times)$.

Exercice 33 ●○○○

On note G l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, où n $\mathbb{Z}$.

1. Montrer que G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

2. À quel groupe familier G est-il isomorphe ?

Exercice 34 ●●○○ — Centre du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$

Déterminer le centre du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Indications

Exercice 12. Penser à la trace.

Exercice 20. Écrire la matrice sous la forme $X^\top X$ avec $X \in \mathscr{M}_{1,3}(\mathbb{K})$.

Éléments de réponses

Exercice 1. **1.** Les produits possibles sont :

$$AB = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 6 \\ 12 & 2 & 0 \end{pmatrix}.\quad AC = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 60 & 4 \end{pmatrix}.\quad CA = \begin{pmatrix} 12 & 8 & -16 \\ 12 & -14 & 6 \\ 30 & -30 & 10 \end{pmatrix}.\quad AD = \begin{pmatrix} 6 \\ 22 \end{pmatrix}.$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & 9 \end{pmatrix}.\quad BC = \begin{pmatrix} 13 & 6 \\ -3 & 2 \\ 37 & -15 \end{pmatrix}.\quad BD = \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

$$EB = \begin{pmatrix} 2x+2z & x+y-2z & -3z \end{pmatrix}.\quad EC = \begin{pmatrix} 8x-3y-5z & 2x+2y+5z \end{pmatrix}.$$

$$DE = \begin{pmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 2x & 2y & 2z \\ -x & -y & -z \end{pmatrix}.\quad ED = \begin{pmatrix} 5x+2y-z \end{pmatrix}.$$

2. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. $AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. En procédant par blocs $\begin{pmatrix} 7 & -11 & 8 & -4 \\ -14 & -2 & -7 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \end{pmatrix}$.

Exercice 14. **2.** $A = 0$.

Exercice 4. **1.** $\left(\frac{11}{13}, \frac{4}{13}\right)$. **2.** $\{(x, 2x+3) \mid x \in \mathbb{R}\}$. **3.** $(5, 3, -2)$. **4.** $\varnothing$. **5.** $\varnothing$. **6.** $(2, 0, 3)$. **7.** $\{(-3z+5, -4z+9, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$. **8.** $(1, -1, 0)$. **9.** $\left\{\left(-\frac{3}{5}z + \frac{2}{5}, -\frac{1}{5}z + \frac{9}{5}, z\right) \,\middle|\, z \in \mathbb{R}\right\}$.

Exercice 5. **1.** $\{(t+1, 2t-1, t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. **2.** $\left\{\left(\frac{5}{3}z + \frac{1}{3}, -\frac{7}{3}z - t + \frac{4}{3}, z, t\right) \,\middle|\, (z, t) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

Exercice 6. Le système est compatible ssi $c - a - b = 0$ et, le cas échéant, les solutions sont les triplets $(b - \lambda, a - b - \lambda, \lambda)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 7. $P = X^2 - 4X + 5$.

Exercice 8. $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -9 & 3 \\ 2 & -5 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -6 \\ 0 & 11 & -4 \\ -2 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ et $\left\{\left(-\frac{1}{9}d, 0, -\frac{2}{9}d, d\right) \,\middle|\, d \in \mathbb{R}\right\}$.

Exercice 9. **1.** $\begin{cases} \{(x, y, 1-x-y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} & \text{si } m = 1 \\ \varnothing & \text{si } m = -2 \\ \left\{\left(-\frac{m+1}{m+2}, \frac{1}{m+2}, \frac{(m+1)^2}{m+2}\right)\right\} & \text{sinon.} \end{cases}$

2. $\begin{cases} \varnothing & \text{si } m \in \{2, -1\} \\ \{(-y, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\} & \text{si } m = 0 \\ \left\{\left(-\frac{m}{m+1}, -\frac{3m}{(m+1)(m-2)}, \frac{3m}{(m+1)(m-2)}\right)\right\} & \text{sinon.} \end{cases}$

Exercice 15. $A = \frac{1}{2}(A^\top + A) + \frac{1}{2}(A^\top - A)$ avec $\frac{1}{2}(A^\top + A) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\frac{1}{2}(A^\top - A) \in \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 18. **a.** $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$. **b.** $B^n = 2^{n-1}B$, $n \geqslant 1$. **c.** $C^n = 2^{2n-1}B$, $n \geqslant 1$.

d. $D^{2n} = 2^n I_2$ et $D^{2n+1} = 2^n D$. **e.** $E^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

f. $F^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 & 0 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$. **g.** $G^n = 2^{n-1}\begin{pmatrix} 2 & n & 3n \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

h. $H^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n^2 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **i.** $I^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$, $n \geqslant 1$.

j. $J^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & \sin(n\theta) \\ -\sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}$. **k.** $K^{2p} = (n-1)^{p-1}\begin{pmatrix} n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{[n]}$, $p \geqslant 1$, et

$K^{2p+1} = (n-1)^p K$. **l.** $L^p = (-1)^p I_n + \dfrac{(n-1)^p - (-1)^p}{n}(L + I_n)$.

Exercice 19. **2.** $x_{n+1} = 3 - 2x_n$.

Exercice 20. $M = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} = X^\top X$, où $X = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M^n = \left(XX^\top\right)^{n-1} M = \left(a^2 + b^2 + c^2\right)^{n-1} M$.

Exercice 21. **1.** $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **2.** Non inversible. **3.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2/3 \\ 1 & -1/2 & -1/6 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Non inversible. **5.** $\begin{pmatrix} -10/3 & 8/3 & -1/3 \\ 25/6 & -10/3 & 2/3 \\ -11/6 & 5/3 & -1/3 \end{pmatrix}$. **7.** $\frac{1}{4}A$. **8.** Non inversible.

6. Inversible ssi $z \notin \mathbb{U}$, d'inverse $\dfrac{1}{1 - |z|^2}\begin{pmatrix} 1 & -\overline{z} & 0 \\ -z & 1 + |z|^2 & -\overline{z} \\ 0 & -z & 1 \end{pmatrix}$.

9. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & -2 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}_{[n]}$. **10.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^{n+1} \\ & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & -1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}_{[n]}$.

Exercice 22. A est inversible si et seulement si $a \notin \{1, -2\}$ et le cas échéant

$$A^{-1} = \frac{1}{(a+2)(a-1)}\begin{pmatrix} a+1 & -1 & -1 \\ -1 & a+1 & -1 \\ -1 & -1 & a+1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 23. $\lambda \in \{4, 2, -3\}$.

Exercice 24. $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$.

Exercice 26. **1.** $A^{-1} = A$. **2.** A est non inversible. **3.** $A^{-1} = -A^2 - 3A - 3I_3$.

4.a. $A = J - I_n$. **4.b.** $J^2 = nJ$.

4.c. $A^{-1} = \dfrac{1}{n-1}(A + (2-n)I_n)$, pour $n \geqslant 2$. Pour $n = 1$, A est non inversible.

Exercice 27. **1.** L'ensemble des solutions est

$$\begin{cases} \{(x, -x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} & \text{si } \lambda = 1 \\ \{(2z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} & \text{si } \lambda = 2 \\ \{(2y, y, -3y) \mid y \in \mathbb{R}\} & \text{si } \lambda = -2 \\ \{(0,0,0)\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-2, 1, 2)$.

3. Pour $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $P^{-1} = \dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 4 & -8 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. **4.** $D = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$.

5. $A^k = PD^kP^{-1} = \dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 + 6\alpha + 2\beta & -8 + 6\alpha + 2\beta & 6\alpha - 6\beta \\ -4 + 3\alpha + \beta & 8 + 3\alpha + \beta & 3\alpha - 3\beta \\ 3\alpha - 3\beta & 3\alpha - 3\beta & 3\alpha + 9\beta \end{pmatrix}$ avec $\alpha = 2^k$ et $\beta = (-2)^k$.

Exercice 29. **2.** $\mathrm{U}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a = \pm 1 \text{ et } b \in \mathbb{Z} \right\}$.

Exercice 34. $Z(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})) = \mathbb{K}^* I_n$.