

Cahier de calcul :  $\emptyset$ .

Banque CCINP :  $\emptyset$ .

## Lois de composition internes

— Exercice 1 ••○○ —  On pose, pour tous  $x, y \in [0, 1]$ ,

$$x \star y = x + y - xy.$$

- Montrer que  $([0, 1], \star)$  est un magma associatif et commutatif avec élément neutre.
- Quels sont les éléments inversibles de  $([0, 1], \star)$  ?

— Exercice 2 ••○○ —  Soit  $(E, \leqslant)$  un ensemble totalement ordonné.

- Montrer que  $(x, y) \mapsto \max\{x, y\}$  définit une loi de composition interne sur  $E$ .
- Montrer que le magma  $(E, \max)$  est associatif et commutatif.
- À quelle condition nécessaire et suffisante  $(E, \max)$  possède-t-il un élément neutre ?
- Si  $(E, \max)$  possède un élément neutre, quels sont ses éléments inversibles ?

— Exercice 3 ••○○ —  Soit  $E$  un ensemble et  $\mathfrak{R}$  l'ensemble des relations binaires sur  $E$ . Pour tous  $R, S \in \mathfrak{R}$ , on définit la relation  $R \star S$  sur  $E$  par

$$x(R \star S)y \iff \exists z \in E, \quad xRz \text{ et } zSy.$$

Par ailleurs, on associe à toute fonction  $f \in E^E$  la relation  $R_f$  définie sur  $E$  par

$$xR_fy \iff y = f(x).$$

- Montrer que  $\star$  est associative, mais non commutative en général.
- Simplifier  $R_f \star R_g$ , pour tous  $f, g \in E^E$ .
- La loi  $\star$  admet-elle un élément neutre ?

— Exercice 4 ••○○ — **Oral X** Soit  $E$  un ensemble fini muni d'une loi de composition interne associative. Montrer qu'il existe  $s \in E$  tel que  $s^2 = s$ .

## Groupes

— Exercice 5 ••○○ —  Pour tous  $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ , on pose

$$(x, y) \star (x', y') = (xx', xy' + y).$$

- Montrer que  $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \star)$  est un groupe. Est-il abélien ?
- Simplifier  $(x, y)^n$ , pour tous  $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ .

— Exercice 6 ••○○ —

Déterminer l'ensemble des structures de groupe sur un ensemble de cardinal 3.

(Indication : on pourra utiliser les résultats de l'exercice 22).

— Exercice 7 ••○○ —

On considère les fonctions de  $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  définies par

$$\begin{aligned} a : x &\mapsto x, & b : x &\mapsto 1 - x, & c : x &\mapsto \frac{1}{x}, \\ d : x &\mapsto \frac{x}{x-1}, & e : x &\mapsto \frac{x-1}{x} & \text{et} & f : x \mapsto \frac{1}{1-x}. \end{aligned}$$

Montrer que  $\{a, b, c, d, e, f\}$  est un sous-groupe de  $(\mathfrak{S}(\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}), \circ)$ , dont on déterminera la table.

— Exercice 8 ••○○ — **Transport de structure**

- Soit  $G$  un groupe,  $E$  un ensemble et  $f$  une bijection de  $G$  sur  $E$ . On définit une loi interne  $\star$  sur  $E$  en posant, pour tous  $x, y \in E$ ,

$$x \star y = f(f^{-1}(x)f^{-1}(y)).$$

Montrer que  $(E, \star)$  est un groupe.

- a. Montrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \text{th}(x + y) = \frac{\text{th } x + \text{th } y}{1 + \text{th } x \text{th } y}.$$

- b. Pour tous  $x, y \in ]-1, 1[$ , on pose

$$x \oplus y = \frac{x + y}{1 + xy}.$$

Montrer que l'on munit ainsi  $(]-1, 1[)$  d'une structure de groupe abélien.

— **Exercice 9** •••• — Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que l'ensemble

$$\left\{ \exp\left(\frac{2ik\pi}{p^n}\right) \mid (k, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \right\}$$

est un sous-groupe de  $\mathbb{C}^*$ .

— **Exercice 10** •••• — Montrer que  $\{z \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N}^*, z^n = 1\}$  est un sous-groupe de  $\mathbb{C}^*$ .

— **Exercice 11** ••••  Soit  $a, b \in \mathbb{N}^*$ .

À quelle condition nécessaire et suffisante  $\mathbb{U}_a$  est-il un sous-groupe de  $\mathbb{U}_b$  ?

— **Exercice 12** •••• — **Groupe des similitudes et groupes diédraux**

On note  $\mathcal{S}$  l'ensemble des fonctions  $z \mapsto az + b$  et  $z \mapsto a\bar{z} + b$  sur  $\mathbb{C}$ , où  $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ .

1. Montrer que  $\mathcal{S}$  est un groupe pour la composition.
2. Soit  $n \geq 2$ . On note  $\mathcal{D}_n$  l'ensemble  $\{f \in \mathcal{S} \mid f[\mathbb{U}_n] \subset \mathbb{U}_n\}$ .
  - a. Pourquoi la fonction  $f|_{\mathbb{U}_n}$  est-elle bijective de  $\mathbb{U}_n$  sur  $\mathbb{U}_n$ , pour tout  $f \in \mathcal{D}_n$ .
  - b. Montrer que  $\mathcal{D}_n$  est un sous-groupe de  $\mathcal{S}$ , appelé le *groupe diédral de degré n*.
  - c. Montrer que  $\mathcal{D}_n$  contient  $\rho : z \mapsto e^{2i\pi/n}z$  et  $\sigma : z \mapsto \bar{z}$ .
  - d. Que vaut la somme des éléments de  $\mathbb{U}_n$  ? En déduire que tout élément de  $\mathcal{D}_n$  fixe 0.
  - e. Montrer que  $\mathcal{D}_n = \{\rho^k s^\varepsilon \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \text{ et } \varepsilon \in \{0, 1\}\}$ .

— **Exercice 13** ••••

Soit  $E$  un ensemble fini non vide muni d'une opération interne  $\star$  associative pour laquelle tout élément est régulier à droite et à gauche. Montrer que  $E$  est un groupe.

— **Exercice 14** ••••

Soit  $G$  un groupe. Montrer que  $G$  est abélien dans les deux situations suivantes.

1. Pour tout  $x \in G$ ,  $x^2 = 1_G$ .
2. Tout élément de  $G$  peut être écrit comme un cube et, pour tous  $x, y \in G$ ,

$$(xy)^3 = x^3 y^3.$$

- a. Montrer que  $x^3 y^2 = y^2 x^3$ , pour tous  $x, y \in G$ .
- b. En déduire que, pour tout  $x \in G$ ,  $x^2$  commute à tout élément de  $G$ .
- c. Conclure.

— **Exercice 15** •••• — **Intersection et union de sous-groupes**

Soit  $G$  un groupe.

1. Soit  $(H_i)_{i \in I}$  une famille de sous-groupes de  $G$ , indexée par un ensemble  $I$ . Montrer que  $\bigcap_{i \in I} H_i$  est un sous-groupe de  $G$ .
2. a. Trouver deux sous-groupes de  $\mathbb{R}^*$  dont la réunion n'est pas un sous-groupe.
- b. Soit  $H$  et  $K$  deux sous-groupes de  $G$ . Montrer que  $H \cup K$  est un sous-groupe de  $G$  si et seulement si  $H \subset K$  ou  $K \subset H$ .
- c. Soit  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite croissante de sous-groupes de  $G$ . Montrer que  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$  est un sous-groupe de  $G$ .

— **Exercice 16** •••• — **Centre d'un groupe**

Soit  $G$  un groupe.

1. Soit  $x \in G$ . On appelle *centralisateur de x dans G*, noté  $C_G(x)$ , l'ensemble des éléments de  $G$  qui commutent à  $x$ . Montrer que  $C_G(x)$  est un sous-groupe de  $G$ .
2. On appelle *centre de G*, noté  $Z(G)$ , l'ensemble des éléments de  $G$  qui commutent à tout élément de  $G$ . Montrer que  $Z(G)$  est un sous-groupe de  $G$ .

— **Exercice 17** ••••

Un sous-groupe d'un groupe produit est-il toujours le produit de deux sous-groupes ?

— **Exercice 18** ••••  **Sous-groupes additifs de  $\mathbb{R}$  (un grand classique !)**

1. Soit  $G$  un sous-groupe de  $(\mathbb{R}, +)$  non réduit à  $\{0\}$ .
  - a. Justifier l'existence de  $a = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$ .
  - b. Montrer que si  $a > 0$ , alors  $a \in G$  puis  $G = a\mathbb{Z}$ .
  - c. Montrer que si  $a = 0$ , alors  $G$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .
2. a. Soit  $a, b \in \mathbb{R}^*$ . Montrer que  $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$  est un sous-groupe dense de  $\mathbb{R}$  si et seulement si  $\frac{a}{b}$  est irrationnel.
- b. En déduire que  $\{\cos(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$  est dense dans  $[-1, 1]$ .

— **Exercice 19** ••••  **Théorème de Lagrange dans le cas abélien**

1. Soit  $G$  un groupe abélien fini et  $g \in G$ .
  - a. Montrer que l'application  $x \mapsto gx$  est une bijection de  $G$  sur  $G$ .
  - b. Montrer, en calculant de deux façons le produit  $\prod_{x \in G} (gx)$ , que  $g^{|G|} = 1_G$ .
2. Déterminer tous les sous-groupes finis de  $\mathbb{C}^*$ .

**Exercice 20 ••••** **?** **Un cas particulier du lemme de Cauchy**

Montrer que tout groupe fini de cardinal pair possède un élément  $x \neq 1$  tel que  $x^2 = 1$ .

**Exercice 21 ••••** **Sous-groupes des automorphismes intérieurs**

Soit  $G$  un groupe. Pour tout  $g \in G$ , on note  $\sigma_g$  l'application  $x \mapsto gxg^{-1}$  de  $G$  dans  $G$ .

1. Montrer que  $\sigma_g$  est un automorphisme de  $G$ , pour tout  $g \in G$ .
2. Montrer que l'application  $\sigma : g \mapsto \sigma_g$  est un morphisme de groupes de  $G$  dans  $\text{Aut}(G)$ .
3. Montrer que  $\text{Ker } \sigma = Z(G)$ , où  $Z(G)$  est le centre de  $G$  (cf. exercice 16).

**Exercice 22 ••••** **Théorème de Cayley**

Soit  $G$  un groupe. Pour tout  $g \in G$ , on note  $\mu_g$  l'application  $x \mapsto gx$  de  $G$  dans  $G$ .

1. Montrer que, pour tous  $g, g' \in G$ ,  $\mu_{gg'} = \mu_g \circ \mu_{g'}$ .
2. En déduire que l'application  $g \mapsto \mu_g$  est un morphisme de groupe injectif de  $G$  dans  $\mathfrak{S}(G)$ .

**Exercice 23 ••••** Soit  $G$  un groupe. Montrer que l'application  $x \mapsto x^{-1}$  est un endomorphisme de  $G$  si et seulement si  $G$  est abélien.**Exercice 24 ••••** **?** **Somme de caractères**

Soit  $G$  un groupe fini et  $\chi$  un morphisme de groupes de  $G$  dans  $\mathbb{C}^*$ . Calculer  $\sum_{g \in G} \chi(g)$ .

**Exercice 25 ••••** **✓** Soit  $G$  et  $G'$  deux groupes isomorphes.

Montrer qu'il en va de même de  $\text{Aut}(G)$  et  $\text{Aut}(G')$ .

**Exercice 26 ••••** **✓** **Groupes d'automorphismes des groupes monogènes**

1. Soit  $G$  un groupe et  $x \in G$ . On pose  $\langle x \rangle = \{x^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .
  - a. Montrer que  $\langle x \rangle$  est un sous-groupe de  $G$ .
  - b. Montrer que les endomorphismes de  $\langle x \rangle$  sont exactement les  $g \mapsto g^n$ , avec  $n \in \mathbb{Z}$ .
2. En déduire
  - a.  $\text{Aut}(\mathbb{Z})$ .
  - b.  $\text{Aut}(\mathbb{Q})$ .
  - c.  $\text{Aut}(\mathbb{U}_n)$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Exercice 27 ••••** **?** **✓**

1. Montrer que les groupes  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{R}_+^*$  sont isomorphes.
2. Montrer que les groupes  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{Q}_+^*$  ne sont pas isomorphes.
3. Déterminer l'ensemble des morphismes de groupes de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{Q}_+^*$ .

**Exercice 28 ••••** **?** **✓** **Oral ENS**

Trouver tous les morphismes de groupes de  $(\mathbb{Q}, +)$  dans  $(\mathbb{Z}, +)$ .

**Anneaux****Exercice 29 ••••** Montrer qu'un élément non nul d'un anneau commutatif est régulier pour la multiplication si et seulement s'il n'est pas un diviseur de 0.**Exercice 30 ••••** **?** Démontrer que tout anneau intègre fini est un corps.**Exercice 31 ••••** **Différence symétrique de deux ensembles**

Soit  $E$  un ensemble. Pour toutes parties  $A$  et  $B$  de  $E$ , on définit la *différence symétrique* de  $A$  et  $B$ , notée  $A\Delta B$ , par

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

1. Illustrer cette définition par un schéma.
2. Que valent  $A\Delta A$ ,  $A\Delta \emptyset$  et  $A\Delta \overline{A}$  ?
3. Exprimer  $\mathbb{1}_{A\Delta B}$  en fonction de  $\mathbb{1}_A$  et  $\mathbb{1}_B$ .
4. Montrer que  $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$  est un anneau commutatif.
5. Déterminer  $\text{U}(\mathcal{P}(E))$ . L'anneau  $\mathcal{P}(E)$  est-il intègre ?
6. Soit  $F$  une partie de  $E$ . Montrer que  $\mathcal{P}(F)$  est quasiment un sous-anneau de  $\mathcal{P}(E)$ . Quelle propriété fait défaut ?

**Exercice 32 ••••** **✓** **Anneau des entiers de Gauss**

1. Soit  $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ .
  - a. Montrer que  $\mathbb{Z}[i]$  est un sous-anneau de  $\mathbb{C}$ .
  - b. Montrer que, pour tout  $z \in \mathbb{Z}[i]$ ,  $|z|^2 \in \mathbb{N}$ .
  - c. En déduire  $\text{U}(\mathbb{Z}[i])$ .
2. Même question avec  $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}] = \{a + ib\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ .

**Exercice 33 ••••**

Déterminer l'unique structure de corps sur un ensemble à deux éléments.

**Exercice 34 •••** Soit  $A$  un sous-anneau de  $\mathbb{R}$ .

Montrer que  $A$  est dense dans  $\mathbb{R}$  si et seulement si  $A \cap ]0, 1[ \neq \emptyset$ .

**Exercice 35 •••** **Éléments nilpotents d'un anneau**

Soit  $A$  un anneau. Un élément  $x \in A$  est dit *nilpotent* s'il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $x^n = 0_A$ .

1. Si  $A$  est intègre, montrer que  $0_A$  est le seul élément nilpotent de  $A$ .
2. Montrer que la somme et le produit de deux éléments nilpotents de  $A$  qui COMMUTENT sont encore nilpotents.
3. Pour tout  $x \in A$  nilpotent, montrer que  $1_A - x$  est inversible et déterminer son inverse.
4. Plus généralement, que dire de la somme d'un élément nilpotent et d'un élément inversible qui commutent ?

**Exercice 36 •••** **Q Un cas particulier du théorème de Jacobson<sup>†</sup>**

Soit  $A$  un anneau. On appelle centre de  $A$ , noté  $Z(A)$ , l'ensemble des éléments de  $A$  qui commutent à tout élément de  $A$  (pour la multiplication bien sûr).

1. Montrer que  $Z(A)$  est un sous-anneau de  $A$ .
2. On suppose que  $x^3 = x$ , pour tout  $x \in A$ .
  - a. Montrer l'assertion

$$\forall (x, y) \in A^2, \quad xy = 0 \implies yx = 0.$$

- b. Soit  $x \in A$ . On suppose que  $x^2 = x$ . Montrer que  $x \in Z(A)$ .

*Indication : on pourra étudier  $x(y - xy)$ , pour  $y \in A$ .*

- c. Montrer que, pour tout  $x \in A$ ,  $x^2 \in Z(A)$ .
- d. En déduire que  $A$  est un anneau commutatif.

**Exercice 37 •••** **Q Anneau de Boole**

Soit  $A$  un *anneau de Boole*, i.e. un anneau non nul pour lequel  $x^2 = x$ , pour tout  $x \in A$ .

1. Montrer que  $A$  est commutatif.
2. Déterminer  $A$  dans le cas où  $A$  est intègre.
3. On définit une relation binaire  $\leqslant$  sur  $A$  en posant, pour tous  $x, y \in A$ ,

$$x \leqslant y \iff yx = x.$$

Montrer que  $\leqslant$  est une relation d'ordre.

†. Le théorème de Jacobson énonce plus généralement qu'un anneau  $A$  est commutatif dès lors que

$$\forall x \in A, \quad \exists n \geqslant 2, \quad x^n = x.$$

**Exercice 38 •••** **✓**

1. Les anneaux  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$  sont-ils isomorphes ?

2. Déterminer tous les endomorphismes d'anneau de  $\mathbb{C}$  dont la restriction à  $\mathbb{R}$  est la fonction identité.

**Exercice 39 •••** **✓** Déterminer les endomorphismes de l'anneau  $\mathbb{Z}$ .**Exercice 40 •••** **✓ Oral X** Soit  $E = \{a + b\sqrt{2} \mid (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$ .

Montrer que  $E$  est un sous-corps de  $\mathbb{C}$  et en déterminer tous les automorphismes.

**Indications**

**Exercice 13.** On pourra utiliser la propriété suivante : si  $E$  est un ensemble fini et si  $f \in E^E$ , alors  $f$  est bijective si et seulement si elle est injective.

**Exercice 17.** Non. Il suffit donc d'exhiber un contre-exemple.

**Exercice 18.** Pour la question 1, penser à la division euclidienne dans  $\mathbb{R}$  (exemple 41 du chapitre 9) et s'inspirer de l'exemple 41 du cours. En 1.b, on pourra notamment raisonner par l'absurde et examiner ce qu'il se passe dans  $G \cap ]a, 2a[$ .

**Exercice 20.** On pourra considérer la relation binaire  $\sim$  sur  $G$  définie par

$$x \sim y \iff x = y \text{ ou } x = y^{-1}$$

et commencer par vérifier qu'il s'agit d'une relation d'équivalence, puis s'intéresser aux classes d'équivalence.

**Exercice 24.** Les applications de l'exercice 22 suggèrent des changements d'indice dans la somme.

**Exercice 27.** 2. On pourra raisonner par l'absurde et songer à  $\sqrt{2}$ .

**Exercice 28.** 3. Un tel morphisme est de la forme  $r \mapsto a^r$ , avec  $a \in \mathbb{Q}_+^*$ .

**Exercice 30.** Considérer l'application  $x \mapsto ax$  pour un élément  $a$  non nul.

**Exercice 36.** 3. On pourra s'intéresser à  $(1+x)^2$  et  $(1+x)^3$  et exploiter le fait que  $(Z(A), +)$  est un groupe.

**Exercice 37.** 1. Que dire de  $(1+x)^2$  et  $(x+y)^2$  pour  $x, y \in A$ .

**Éléments de réponses**

**Exercice 1.** 1. Le neutre est 0. 2. 0 est le seul élément inversible.

**Exercice 2.** 3.  $E$  possède un minimum. 4. Le neutre est le seul élément inversible.

**Exercice 3.** 2.  $R_f \star R_g = R_{g \circ f}$ . 3. Le neutre est la relation = d'égalité.

**Exercice 5.** 2.  $(x, y)^n = \left( x^n, y \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right)$ .

	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
$a$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
$b$	$b$	$a$	$e$	$f$	$c$	$d$
$c$	$c$	$f$	$a$	$e$	$d$	$b$
$d$	$d$	$e$	$f$	$a$	$b$	$c$
$e$	$e$	$d$	$b$	$c$	$f$	$a$
$f$	$f$	$c$	$d$	$b$	$a$	$e$

**Exercice 7.**

**Exercice 11.**  $a$  divise  $b$ .

**Exercice 19.** 2. Les  $\mathbb{U}_n$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Exercice 24.**  $\sum_{g \in G} \chi(g) = \begin{cases} \text{Card}(G) & \text{si } \chi = \tilde{1} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

**Exercice 25.** Si  $f$  est un isomorphisme de  $G$  sur  $G'$ , alors  $g \mapsto f \circ g \circ f^{-1}$  est un isomorphisme de  $\text{Aut}(G)$  sur  $\text{Aut}(G')$ .

**Exercice 26.** 2.a  $\text{Aut}((\mathbb{Z}, +)) = \{\text{Id}_{\mathbb{Z}}, -\text{Id}_{\mathbb{Z}}\}$  et  $(\text{Aut}((\mathbb{Z}, +)), \circ) \simeq (\text{U}(\mathbb{Z}), \times)$ .

2.b  $\text{Aut}((\mathbb{Q}, +)) = \{x \mapsto ax \mid a \in \mathbb{Q}^*\}$  et  $(\text{Aut}((\mathbb{Q}, +)), \circ) \simeq (\mathbb{Q}^*, \times)$ .

2.c  $\text{Aut}((\mathbb{U}_n, \times)) = \{\omega \mapsto \omega^a \mid a \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \text{ et } a \wedge n = 1\}$ .

**Exercice 27.** 1. Considérer  $\exp$  ou  $\ln$ . 3. Le seul morphisme est le morphisme trivial  $x \mapsto 1$ .

**Exercice 28.** Il y a seulement la fonction nulle.

**Exercice 32.** 1.c  $\text{U}(\mathbb{Z}[i]) = \{\pm 1, \pm i\}$ . 2.c  $\text{U}(\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]) = \{\pm 1\}$ .

**Exercice 38.** 1. Non. 2.  $\text{Id}_{\mathbb{C}}$  et  $z \mapsto \bar{z}$ .

**Exercice 39.**  $\text{Id}_{\mathbb{Z}}$ .

**Exercice 40.**  $\text{Id}_E$  et  $a + b\sqrt{2} \mapsto a - b\sqrt{2}$ .